Prof. Dr. H. König SS 2013

Übungen zur Analysis II
Blatt 6

23. Man bestimme diejenigen Zahlen $\alpha > 0$, für die das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\, dx$$

existiert (mit Beweis!).

24. (a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Man zeige:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\ \sin(mx)\ dx \ = \ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx)\ \cos(mx)\ dx = \delta_{nm}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nx)\ \cos(mx)\ dx = 0 \quad , \quad \delta_{nm} := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{array} \right\}.$$

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ absolut summierbare Folgen und $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) \ + \ b_n \sin(nx))\,,\ x \in [0, 2\pi].$$

Zeige für $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ \cos(nx)\, dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ \sin(mx)\ dx.$$

25. Man berechne die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x^2+1}{(x+2)(x-1)^2}\ .$$

Berechne f' und $\int f(x)dx$.

26.* Zeige, dass $(\ell_1, \|\cdot\|_2)$ ein normierter, nicht vollständiger Raum ist. Dabei ist

$$\ell_1 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle|\ x_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}, \qquad \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Warum ist $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2 < \infty$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$?

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 15.05.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 26* nicht bearbeiten.