

Übungen zur Analysis II
Blatt 5

19. Man berechne die Länge der Parabel $y = x^2$ über dem Intervall $[-1, 1]$.

20. Zeige, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^N \frac{\sin t}{t} dt$$

existiert.

Tipp: Partielle Integration.

Zeige ferner, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \infty$$

ist.

21. Man berechne die Integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}, \quad \int_1^2 \frac{x+1}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

22.* Die Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gegeben durch

$$f_n(x) := \left\{ \begin{array}{ll} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - x \right), & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{array} \right\}.$$

Skizziere den Graphen von f_n . Zeige, dass $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für alle $x \in [0, 1]$

existiert. Bestimme $\int_0^1 f_n(x) dx$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{sowie} \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 08.05.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 22* nicht bearbeiten.