Übungen zur Analysis I
Blatt 3

9. (a) Man zeige durch Aufstellen der Wahrheitstafel, dass für drei Aussagen A, B, C stets die folgende Aussage wahr ist:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Dazu bestimme man die Wahrheitswerte von $D := ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C))$ und $E := (A \Rightarrow C)$ und dann von $(D \Rightarrow E)$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man gebe die **Negation** der folgenden Aussage in mathematischen Symbolen **und** in Worten an:

$$\exists_{x_0 \in \mathbb{R}} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}} \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

10. Sei $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z = 4\}$. Man gebe eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to H$ an, mit dem Beweis der Bijektivität. Was stellt H geometrisch dar?

11. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Seien $a, b, c, d \in K$ mit $b \neq 0 \neq d$. Wir benutzen die Notation $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$. Beweise mittels der Körperaxiome:

(a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$

(b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$

12*. Sei $(K, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper und seien $x, y, a \in K$ sowie $\varepsilon > 0$. Mittels der Axiome (und ggf. Aussagen aus der Vorlesung) beweise man die folgenden Implikationen

(i) $x < y \Rightarrow x < (x + y)/2 < y$

(ii) $|x - a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$

(iii) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, den 14.11.2012, 8:15 Uhr im Schrein.
(2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 12* nicht bearbeiten.)