Übungen zur Analysis II
Blatt 3

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I := [a, b]$.

11. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeige: $\alpha f + \beta g : I \to \mathbb{R}$ ist integrierbar und es gilt
$$\int_I (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_I f(x)dx + \beta \int_I g(x)dx.$$
(Die Integration ist also eine lineare Operation.)

12. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Ferner gebe es $y \in I$ mit $f(y) > 0$.
Zeige: $\int_I f(x)dx > 0$.

13. Sei $h : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$h(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x).$$
Bestimme die Extrema und die Wendepunkte von h.

14.* Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeige mittels des Riemannschen Integrierbarkeitskriteriums, dass Folgendes gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass *für alle* Zerlegungen Z von I mit Feinheit $\eta(Z) < \delta$ gilt:
$$0 \leq \overline{S}(Z, f) - \underline{S}(Z, f) < \varepsilon.$$

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 24.04.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 14* nicht bearbeiten.