

Übungen zur Analysis I Blatt 2

5. i) Sei X eine Menge und $\{M_i \mid i \in I\}$ ein System von Teilmengen $M_i \subseteq X$ von X .
Zeige:

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus M_i).$$

- ii) Zeige ferner für drei Mengen M_1, M_2, M_3 , dass gilt

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3).$$

6. Seien X, Y, Z nicht-leere Mengen und $f : X \rightarrow Y$ sowie $g : Y \rightarrow Z$ Funktionen. Man zeige:

- a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv,
b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv.

Beweise ferner:

- c) g ist surjektiv $\Leftrightarrow \exists h : Z \rightarrow Y \quad g \circ h = \text{Id}_Z$,
d) f ist injektiv $\Leftrightarrow \exists h : Y \rightarrow X \quad h \circ f = \text{Id}_X$.

7. Seien $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definiert durch $f(x) = 2 - x$, $g(x) = x^2$.

Berechne $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ g \circ g$, $g \circ f \circ g$, $g \circ g \circ f$ sowie $(f \circ g)(1)$ und $(g \circ f)(1)$.

- 8*. Sei \mathbb{P} die Menge der Primzahlen. Man schreibe die Aussagen (a) und (b) als deutschen Satz und formuliere die Aussagen (c) und (d) mit Hilfe von Quantoren als Formelaussage

- (a) $\forall \substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2} \exists p \in \mathbb{P} \quad n < p < 2n$
 (b) $\forall n \in \mathbb{N} ((n \geq 4 \wedge 2|n) \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{P} \quad n = p + q)$
 (c) Jede Primzahl, die bei Division durch 4 den Rest 1 ergibt, kann als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden.
 (d) Es gibt eine Quadratzahl, die als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden kann.

Dabei ist „Quadratzahl“ das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, den 7.11.2012, 8:15 Uhr im Schrein (1. Stock des Mathematischen Seminars). Die Abgabe kann allein oder in Gruppen zu zweit erfolgen. Bitte vermerken Sie deutlich lesbar Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

1-Fach-BA-Studierende sollen alle 4 Aufgaben bearbeiten, 2-Fach-BA-Studierende sollen die Aufgaben 5-7 bearbeiten; sie *dürfen* aber selbstverständlich auch die Aufgabe 8 (mit *) bearbeiten.