Übungen zur Analysis II
Blatt 2

7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin(x)$. Man gebe die Taylorsche Formel mit Restglied für f bei Entwicklung von f um den Punkte $x_0 = 0$ an und berechne damit den Wert von $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ bis auf einen Fehler von maximal $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ genau.

8. Sei $I := [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar.
   Es gebe $0 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq 1$ mit $f(x_i) = 0$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$.

   Zeige: Es gibt $\zeta \in (0,1)$ mit $f^{(n)}(\zeta) = 0$.

9. Sei $f : [0,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2x - 2$. Bestimme die optimale Lipschitz-Konstante L für f, d.h. finde ein minimales $L > 0$, so dass für alle $x, y \in [0,4]$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|.$$

10.* Sei $b > 0$ und $f : [0,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2^x$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und Z die durch die Punkte $\left\{0, \frac{1}{n}\,b, \frac{2}{n}\,b, \ldots, \frac{n-1}{n}\,b\right\}$ gegebene Zerlegung von $[0,b]$.

   Berechne die zugehörige Untersumme $\underline{S}(Z)$ von f. Konvergieren diese Untersummen für $n \to \infty$, und wenn ja, wogegen?

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 17.04.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 10* nicht bearbeiten.