Prof. Dr. H. König WS 2012/13

Übungen zur Analysis I
Blatt 12

45. Sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \ln\big((1+x)/(1-x)\big)$. Man berechne zunächst die erste und zweite Ableitung von f, stelle dann eine Vermutung für $f^{(n)}(x)$ auf und beweise diese durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Was ergibt sich für $f^{(n)}(0)$?

    Sei ferner $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^{(x^x)}$. Bestimme $g'(x)$.

46. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in I. Zeige durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass für alle $x \in I$ gilt

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) g^{(j)}(x).$$

47. Welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ erfüllen die Gleichung $z^5 = -1$?

    Bestimme die Werte von $\cos\frac{\pi}{5}$ und $\sin\frac{\pi}{5}$ als Wurzelausdrücke.

    Tipp: Eulersche Formel, Additionstheorem der Exponentialfunktion.

48*. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to J, \quad g : J \to \mathbb{R}$ viermal differenzierbar.

    Bestimme $(g \circ f)^{(4)}$ als Funktion der Ableitungen von g und f (Kettenregel, Produktregel).

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, den 30.01.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
(2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 48* nicht bearbeiten.)