Übungen zur Analysis I
Blatt 11

41. Definiere die hyperbolischen Funktionen $\cosh,\ \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeige:

(a) Es ist $\cosh \geq 1$. Ferner sind $\cosh|_{\mathbb{R}_+},\ \cosh|_{\mathbb{R}_-}$ und $\sinh$ streng monoton.

(b) Bestimme die Umkehrfunktionen $(\cosh|_{\mathbb{R}_+})^{-1}$, $(\cosh|_{\mathbb{R}_-})^{-1}$ und $(\sinh)^{-1}$ explizit, unter genauer Angabe ihrer Definitionsbereiche.

42. Seien $b > 1$, $a > 0$. Zeige:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^a}{b^x} = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_b\ x}{x^a} = 0$.

(b) Für alle $x, y > 0$ gilt $\dfrac{1}{2}(\log_b\ x + \log_b\ y) \leq \log_b \left(\dfrac{1}{2}(x+y)\right)$.

Tip zu (1), erster Fall: man könnte die Reihenentwicklung für b^x benutzen.

43. Man finde alle Lösungen $x \in [0, 2\pi]$ der Gleichungen

$$\sin(2x) + \cos(x) = 0$$

und

$$\sin(2x) + \cos(2x) = 1.$$

44*. Man zeige:

(a) Die Gleichung $2^x = 5x$ hat mindestens zwei reelle Lösungen $x \in \mathbb{R}$.

(b) Die Gleichung $x2^x = 1$ hat genau eine reelle Lösung. Diese liegt zwischen 0 und 1.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, den 23.01.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
(2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 44* nicht bearbeiten.)