Prof. Dr. H. König WS 2012/13

Übungen zur Analysis I
Blatt 10

37. (a) Seien $x_n \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x_n}{1+x_n}$ konvergiert.
Zeige, dass die Konvergenz von $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ auch die von $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{x_n\, x_{n+1}}$ impliziert.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n}$?

38. (i) Sei $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f : I \to I$ stetig.
Zeige: f besitzt einen Fixpunkt, d.h. es gibt $x \in I$ mit $f(x) = x$.

(ii) Sei $I = [1, 2]$ und $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$.
Zeige $f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig mit Bild $f \subseteq I$. Welches ist der Fixpunkt von f?

(iii) Sei $I = [0, 1]$ und sei $f : I \to I$ stetig mit $f(0) = f(1)$.
Zeige: Es gibt $t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ mit $f(t) = f\left(t + \dfrac{1}{2}\right)$.

(iv) Zeige: Aussage (i) ist i.a. falsch für offene Intervalle I.

39. Sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$.
Zeige unmittelbar mit der Definition, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.
Ist f stetig?

40*. Sei $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) f ist gleichmäßig stetig auf $[0, 1)$.

(2) $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)$ existiert.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, den 16.01.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
(2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 40* nicht bearbeiten.)