Übungen zur Analysis II
Blatt 10

39. Man berechne die Jacobi-Matrix der Polarkoordinaten-Transformation im $\mathbb{R}^3$,

$$f: \mathbb{R}_{>0} \times (0,2\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$.

Berechne ferner die Determinante der Jacobi-Matrix von f.

40. Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ xy^2 \end{pmatrix}, \qquad g\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(u) \\ \cos(uvw) \end{pmatrix}.$$

Sei $h := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Berechne die Jacobi-Matrizen von f und g.

Berechne die Jacobi-Matrix von h einerseits mittels der direkten Formelvorschrift für h und andererseits mittels der Kettenregel.

41. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x)\ \cos(y) \\ \tan(x) + \sin(y) \end{pmatrix}.$$

Sei $v = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$. Bestimme die Richtungsableitung von f in Richtung v im Punkt $z = \begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/3 \end{pmatrix}$, also $\dfrac{\partial f}{\partial v}(z)$.

42.* Sei $f : (0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinaten-Abbildung

$$f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sei $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $h := g \circ f$, d.h. $h(r,\varphi) = g(x,y)$. Zeige mit der Kettenregel, dass folgendes gilt:

$$\triangle\, g := \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}.$$

Berechne $\triangle g$ für $g(x,y) = ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, wenn $(x,y) \neq (0,0)$ ist.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 19.06.2013, 8:15 Uhr im Schrein.
2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 42* nicht bearbeiten.