Prof. Dr. H. König SS 2013

Übungen zur Analysis II
Blatt 1

1. Seien $a, b > 0$. Die Ellipse $E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ wird durch den Graphen der Funktionen $f_1, f_2 : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := b\sqrt{1-(x/a)^2}$, $f_2(x) := -b\sqrt{1-(x/a)^2}$ begrenzt. Man bestimme die Fläche des größten achsenparallelen Rechtecks, welches E einbeschrieben werden kann.

2. Die trigonometrischen Funktionen $f = \sin$ bzw. $f = \cos$ erfüllen die Differentialgleichung $f'' + f = 0$. Man zeige umgekehrt, dass jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Gleichung $g'' + g = 0$ erfüllt, die Form $g = \alpha \sin + \beta \cos$ hat, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ feste Zahlen sind.

   Tipp: Bilde $\varphi := g \cos - g' \sin$, $\psi := g \sin + g' \cos$ und berechne φ' und ψ'.

3. (a) Zeige für $0 \leq s \leq \pi/2$, dass $0 \leq \cos s \leq \exp(-s^2/2)$ gilt.
   Tipp: Untersuche $\cos s\ \exp(s^2/2)$ auf Monotonie.

   (b) Zeige für $0 \leq s \leq \pi/2$ und $0 \leq x \leq 1$, dass $\cos(xs) \geq (\cos s)^{x^2}$ gilt.
   Tipp: Zeige, dass $\sqrt{\ln(1/\cos s)}$ eine konvexe Funktion definiert.

4. Untersuche, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimme sie, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \tan x}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x)) \arcsin(\frac{1}{2\cos(x)})}{\arcsin(\frac{1}{2\cos(x)}) - \frac{\pi}{6}}.$$

5. Bestimme das Taylorpolynom n-ten Grades zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \exp(x)$ in $x_0 = 2$ und zeige, dass das Restglied $R_{n+1}(f, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ für n gegen ∞ gegen 0 konvergiert.

6.* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \exp(-\frac{1}{x^2}), x \neq 0$ und $f(0) := 0$ gegeben. Beweise, dass f in 0 beliebig oft differenzierbar ist, mit $f^{(n)}(0) = 0$.
   Zeige dazu, dass $f^{(n)}(x) = p_{3n}(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2}), x \neq 0$ gilt, wobei p_{3n} ein geeignetes Polynom $3n$-ten Grades ist (Induktion!).

Abgabe der Übungen Freitag, 12.04.2013, in der Vorlesung.
2-Fach-BA-Studierende *müssen* Aufgabe 6* nicht bearbeiten.