1 Aufgabe 15 Teil 1

In der Aufgabe 15 a) soll das folgende Integral ausgerechnetwerden:

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Dazu verwendet man zum Beispiel eine partielle Integration mit den Funktionen: $f,g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{1/2}$. Der Satz über partielle Integration verlangt aber eine auf dem abgeschlossenen Intervall steig differenzierbare Funktion. g ist aber nur auf $(0,1]$ differenzierbar. Sei also $0 < \varepsilon < 1$ und betrachte im folgenden die Funktionen $g|_{[\varepsilon,1]}$ und $f|_{[\varepsilon,1]}$ und berechne zunächst das Integral

$$\int_\varepsilon^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

und bilde dann den Grenzwert $\varepsilon \to 0$. D.h., betrachte obiges Integral als uneigentliches Riemann-Integral.
Da nun die Einschränkungen $g|_{[\varepsilon,1]}$ und $f|_{[\varepsilon,1]}$stetig differenzierter sind, folgt:

$$\int_\varepsilon^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_\varepsilon^1 x^2\,x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_\varepsilon^1 g'|_{[\varepsilon,1]}(x)f|_{[\varepsilon,1]}(x)\,dx$$

$$= \Big[g'|_{[\varepsilon,1]}(x)f|_{[\varepsilon,1]}(x)\Big]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 g|_{[\varepsilon,1]}(x)f'|_{[\varepsilon,1]}(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{-1}{3}\,x^2(1-x^2)^{3/2}\right]_\varepsilon^1 - \frac{-2}{3}x\int_\varepsilon^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \left[\frac{-1}{3}\,x^2(1-x^2)^{3/2}\right]_\varepsilon^1 + \left[\frac{-1}{5}\,(1-x^2)^{5/2}\right]_\varepsilon^1$$

Da diese Stammfunktion stetig ist, folgt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{-1}{3}\,x^2(1-x^2)^{3/2}\right]_\varepsilon^1 + \left[\frac{-1}{5}\,(1-x^2)^{5/2}\right]_\varepsilon^1 = \frac{2}{15}$$

2 Aufgabe 18

Aufgabe.
Sei $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar.
Zeige mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium, dass $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Lösung.
Setze $f_+ = \begin{cases} f(x) & \text{,falls } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{,falls } f(x) < 0 \end{cases}$, $f_= \begin{cases} f(x) & \text{,falls } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{,falls } f(x) > 0 \end{cases}$
und analog g_+, g_-. Es gilt dann: $f = f_+ - f_-$ und $g = g_+ - g_-$. Mit der Linearität der Integrals folgt dann:

$$\int f \cdot g = \int (f_+ - f_-) \cdot (g_+ - g_-)$$

$$= \int f_+ \cdot g_+ - \int f_- \cdot g_+ - \int f_+ \cdot g_- + \int f_- \cdot g_-.$$

Es genügt also zu zeigen, dass die Behauptung für $f, g : I \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt. Nach Vor. sind f, g integrierbar, folglich beschränkt und es existiert darum ein $M > 0$ mit $f(I), g(I) \subseteq [0, M]$.
Sei weiter $\varepsilon > 0$. Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium ex. Zerlegungen Z_1, Z_2 von I mit

$$\overline{S}(Z_1, f) - \underline{S}(Z_1, f) < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ und } \overline{S}(Z_2, g) - \underline{S}(Z_2, g) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Mit der Verfeinerung $Z := Z_1 \cup Z_2$ von Z_1 und Z_2 gilt dann nach Übung 14:

$$\overline{S}(Z, f) - \underline{S}(Z, f) < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ und } \overline{S}(Z, g) - \underline{S}(Z, g) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Hat $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ die Zerlegungsintervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ mit $k \in \underline{n}$ und ist $M_k(h) := \sup\limits_{x \in I_k} h(x)$ und $m_k(h) := \inf\limits_{x \in I_k} h(x)$ für eine beschränkte Funktion $h : I_k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist, weil $f(x), g(x) \geq 0$,:

$$M_k(f \cdot g) \leq M_k(f) \cdot M_k(g) \text{ und } m_k(f \cdot g) \geq m_k(f) \cdot m_k(g).$$

Es folgt:

$$M_k(f \cdot g) \cdot m_k(f \cdot g) \leq M_k(f) \cdot M_k(g) - m_k(f) \cdot m_k(g)$$
$$= M_k(f) \cdot (M_k(g) - m_k(g)) + (M_k(f) - m_k(f)) \cdot m_k(g)$$
$$\leq M\left[(M_k(g) - m_k(g)) + (M_k(f) - m_k(f))\right].$$

Es folgt insgesamt:

$$\overline{S}(Z, f \cdot g) - \underline{S}(Z, f \cdot g) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \left(M_k(f \cdot g) - m_k(f \cdot g)\right)$$

$$= M\left(\overline{S}(Z, g) - \underline{S}(Z, g) + \overline{S}(Z, f) - \underline{S}(Z, f)\right) < M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon$$