Aufgabe. 29.2
Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $d_1(x,y) := |x-y|$ und $d_2\ (x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$.
Zeige: (2) Die offenen Mengen in $(\mathbb{R}, d_1)$ fallen mit den offenen Mengen in $(\mathbb{R}, d_2)$ zusammen.

Beweis
Seien B_1, B_2 Kugeln bzgl. der Metriken d_1 bzw. d_2. Die Funktion arctan : $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist differenzierbar, injektiv und streng monoton wachsend. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert für $x, y \in \mathbb{R}$ ein $z \in (x,y)$ mit:

$$d_2(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)| = \frac{1}{1+z^2} \cdot |x-y| < |x-y| = d_1(x,y).$$

Es folgt also $B_1(x,\varepsilon) \subseteq B_2(x,\varepsilon)$. Denn ist $y \in B_1(x,\varepsilon)$, so ist $d_1(x,y) < \varepsilon$. Dann ist nach obiger Rechnung auch $d_2(x,y) < \varepsilon$. D.h. aber, $y \in B_2(x,\varepsilon)$.
Ist also U d_2-offen, so auch bzgl. d_1.
Es existiert also ein $\varepsilon > 0$ mit $B_1(x,\varepsilon) \subset U$.

Sei nun U d_1-offen. O.B.d.A. sei nun $x \geq 0$. Setze $y := \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$. Wähle nun $\delta > 0$ so klein, dass $\frac{\delta}{\cos^2(y+\delta)} \leq \varepsilon$ ist; insbesondere gilt dann $y + \delta < \frac{\pi}{2}$. Sei $y \in B_2(x,\delta)$. Wiederum wenden wir den Mittelwertsatz an und zwar auf die Funktion tan : $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$. Dann existiert also ein Wert θ zwischen $y = \arctan(x)$ und $\tilde{y} = \arctan(y)$ mit:

$$d_1(x,y) = |x-y| = \frac{1}{\cos^2(\theta)}|y - \tilde{y}| = \frac{1}{\cos^2(\theta)}|\arctan(x) - \arctan(y)|$$

$$\leq \frac{1}{\cos^2(y+\delta)} d_2(x,y) < \frac{\delta}{\cos^2(\theta)} < \varepsilon.$$

D.h., $B_2(x,\delta) \subset B_1(x,\varepsilon) \subseteq U$. Es folgt also mit gleicher Begründung wie oben: Also ist auch U auch d_2-offen.

$\square$