Inhaltsverzeichnis

6 Topologische Grundlagen

Funktionen in naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen sind meist von mehreren Variablen abhängig: etwa von 3 Ortskoordinaten, 1 Zeitkoordinate: $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. Um Konvergenz, Stetigkeit und Differenzierbarkeit für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zu definieren, braucht man einen allgemeinen Abstandsbegriff, der den Betrag verallgemeinert: Dies führt zu **Normen** oder allgemeiner, **Metriken**.

6.1 Normierte Räume

Vektorräume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, die in der Analysis wichtig sind:

i) $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x = \sum\limits_{i=1} x_i e_i\}, \quad e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ mit koordinatenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

ii) $I \subset \mathbb{R}$ kompakt, $C(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$, punktweise Operationen.

Definition. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. X zusammen mit einer Abbildung $||\cdot|| \; : X \to \mathbb{R}^+$ (**Norm**) heißt ein **normierter Raum** :⇔

$$\forall x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{K} \begin{cases} \text{i)} & ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{ii)} & ||\alpha x|| = |\alpha| \; ||x|| \\ \text{iii)} & ||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \textbf{Dreiecksungleichung} \end{cases}$$

Notation. $(X, ||\cdot||)$.

Eine Norm $||\cdot||$ verallgemeinert den Betrag $|\cdot|$ in $\mathbb{K}$: "**Längenbegriff**" für Vektoren $x \in X$.

Folgerung. $|\, ||x|| - ||y|| \,| \leq ||x-y||$, mit der Interpretation, dass $||x-y||$ der "**Abstand von x und y**" ist.

Beispiele.

1) $X = \mathbb{R}^n,\ ||x||_\infty = \sup\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| \quad (n=1\ :\ ||\cdot|| = |\ \ |) : l_\infty^n := (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$.

2) $X = \mathbb{R}^n,\ ||x||_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i| : l_1^n := (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$.

3) $X = \mathbb{R}^n,\ ||x||_2 = (\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$ **euklidische Norm** : $l_2^n := (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$.

4) $X = C(I),\ ||f||_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$.

5) $X = \ell_1, c_0, \ell_\infty, \ell_2$, wobei dies die l_1^n, l_∞^n, l_2^n entsprechenden Räume unendlicher Folgen (mit endlichen Normwerten) sind. Dabei ist c_0 der Raum der Nullfolgen und l_∞ der Raum der beschränkten Folgen unter der Supremumsnorm.

Die euklidische Norm kommt von einem Skalarprodukt her.

6.2 Skalarprodukte

Definition. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $(\cdot,\cdot)\ :\ X \times X \to \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt** $:\Leftrightarrow \forall x, x_1, x_2, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(1) $(x,y) = \overline{(y,x)}$,

(2) $(x,x) \geq 0$ und $((x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$,

(3) $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1,y) + \beta(x_2,y)$.

Beispiele.

a) $X = \mathbb{K}^n$, $(x,y) := \sum\limits_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$

b) $X = C(I)$, $(f,g) := \int\limits_I f(t)\overline{g(t)}dt$

Folgerung: $(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}(x,y_1) + \overline{\beta}(x,y_2)$.

Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Sei X ein Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Dann gilt für alle $x, y \in X$, dass $|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$.

Beweis. O.B.d.A. sei $y \neq 0$, also $(y,y) \neq 0$. Für alle $t \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq (x+ty, x+ty) = (x,x) + t(y,x) + \bar{t}(x,y) + t^2(y,y) .$$

Wähle $t = -(x,y)/(y,y)$. Dann folgt $0 \leq (x,x) - |(x,y)|^2/(y,y)$. □

Satz. *Sei* $||x|| := \sqrt{(x,x)}$. *Dann ist* $||\cdot||$ *eine Norm.*

Beweis der Dreiecksungleichung, die in diesem Fall auch Minkowski-Ungleichung heißt:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= (x+y, x+y) = ||x||^2 + ||y||^2 + (y,x) + (x,y) \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||\,||y|| = (||x|| + ||y||)^2 \ . \end{aligned}$$

□

Beispiel. In a) ist $||\cdot|| = ||\cdot||_2$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{K}^n$,
in b) ist $||f|| = (\int\limits_I |f(t)|^2 dt)^{1/2}$ die "L_2-Norm".

Definition. Ein Vektorraum X über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt heißt **Prähilbertraum**, wenn er mit der Norm $||\cdot|| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ versehen ist. Dies ist ein spezieller normierter Raum.

6.3 Metrische Räume

Einen Abstandsbegriff kann man auf allgemeineren Mengen als Vektorräumen definieren. Das führt zum Begriff der **Metrik**.

Definition. Eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ heißt **metrischer Raum** und d eine **Metrik**, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(1) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ **Symmetrie**

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ **Dreiecksungleichung**

Notation (X,d) .

Beispiele.

a) Sei $(X, ||\cdot||)$ normiert. Dann definiert $d(x,y) := ||x-y||$ eine Metrik.

b) $X = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \ x_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$, $d(x,y) := \sum\limits_n \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|}$: Dies definiert d als Metrik auf X.

c) X Menge, $d(x,y) = \left\{\begin{matrix} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{matrix}\right\}$: **diskrete** Metrik auf X.

d) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$: Arcustangens-Metrik auf $\mathbb{R}$.

e) $Y \subset (X, ||\cdot||)$ normiert, $(Y, ||\cdot - \cdot|| \ |_{\ Y\times Y})$ ist metrischer Raum.

In metrischen Räumen kann man (ε-)Umgebungen und offene Mengen wie in $\mathbb{R}$ einführen.

Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum und seien $x \in X, \varepsilon > 0$.

(i) $B(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ $[\overline{B}(x,\varepsilon) := \{y \in X \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}]$ heißen **offene** [**abgeschlossene**] **ε-Kugeln um** x.

(ii) $U \subset X$ heißt **offen** $:\Leftrightarrow$ $\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 \ \ B(x,\varepsilon) \subseteq U$.

$U \subset X$ heißt **abgeschlossen** $:\Leftrightarrow X - U$ ist offen.

(iii) U heißt **Umgebung von** x $:\Leftrightarrow x \in U$ und $\exists \varepsilon > 0 \ \ B(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Bemerkungen.

(a) $B(x,\varepsilon)$ ist offen, $\overline{B}(x,\varepsilon)$ ist abgeschlossen. Denn es gilt:

$(y \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$. Sei $\delta := \varepsilon - d(x,y)$. Dann $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$, da $z \in B(y,\delta) \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < (\varepsilon - \delta) + \delta = \varepsilon$.)

(b) $\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y_i - x_i| < \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n\}$ sind offen in $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||_2)$: Übung!

(c) Endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen. Endliche Vereinigungen und beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

In normierten Räumen ist $B(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid ||x-y|| < \varepsilon\}$.

6.4 Konvergenz, Häufungspunkte

Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x : \mathbb{N} \to X$ eine **Folge**, mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ identifiziert. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen $x \in X$ $:\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\forall U \text{ Umgebung von } x \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0 \ \ x_n \in U \\ \Leftrightarrow \quad &\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0 \ \ d(x_n, x) < \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Dabei ist $d(x_n,x) < \varepsilon$ äquivalent zu $x_n \in B(x,\varepsilon)$. Dann heißt x **Limes** oder **Grenzwert** von x_n, $x = \lim\limits_n x_n, \ x_n \to x$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **konvergent** $:\Leftrightarrow \exists x \ x_n \to x$. Sonst heißt (x_n) **divergent**.

- $(X, || \cdot ||)$ normiert. $x_n \to x \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon \geq 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq n_0 \ \ ||x_n - x|| < \varepsilon$.
- Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt (das ergibt sich aus $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y)$.

Jede Teilfolge einer gegen x konvergenten Folge konvergiert gegen x .

Definition. Seien (X,d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$.

(1) x ist **Häufungspunkt** der Folge (x_n) $:\Leftrightarrow \forall U$ Umgebung von x : $x_n \in U$ für **unendlich** viele $n \in \mathbb{N}$.

(2) x ist **Häufungspunkt** der Menge $A :\Leftrightarrow \forall U$ Umgebung von x : $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

Also wie vorher: x Häufungspunkt von $\{x_n\} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ x Häufungspunkt von (x_n) . Ferner wie vorher in $\mathbb{R}$:

Lemma. a) *x ist Häufungspunkt der Folge (x_n) $\Leftrightarrow$ x ist Limes einer Teilfolge der Folge (x_n) .*

b) *x ist Häufungspunkt der Menge M $\Leftrightarrow$ x ist Limes einer Folge paarweise verschiedener Elemente aus M .*

Beweis.

a) "$\Rightarrow$" $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists x_{m_n} \in B(x, \frac{1}{n})\ \Rightarrow\ x_{m_n} \to x$.

b) "$\Rightarrow$" Sukzessive wählbar: $x_m \in M,\ x_m \in (B(x, r_m) - \{x\})$, $r_m \to 0$ so schnell, dass alle x_m verschieden sind $(r_{m+1} < d(x_m, x) < r_m)$. Dann $x_m \to x$.

c) "$\Leftarrow$" $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k\ \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists k_0\ \forall n \subseteq n_0\ x_n \in U_\varepsilon(x)$. Anwenden auf x_k = Teilfolge von (x_n) in a) bzw. x_k = verschiedene Elemente aus M in b).

In b) ist x Häufungspunkt von $\{x_k\}$, also Häufungspunkt von M . □

Satz. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$. Äquivalent:*

(1) *A ist abgeschlossen.*

(2) *A enthält sämtliche Häufungspunkte von A . (vgl. 3.5)*

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei x Häufungspunkt von A . Nach dem Lemma gibt es $x_n \in A,\ x_n \neq x$ mit $x_n \to x$. Angenommen x liege nicht in A, also $x \in X \setminus A$. Da $X \setminus A$ offen ist, $\exists \varepsilon > 0\ B(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$. Somit $\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ x_n \in B(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$.

Widerspruch zu $x_n \in A$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $x \in X \setminus A$. Z.z. $\exists \varepsilon > 0\ B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Wäre das falsch, wäre für alle $n \in \mathbb{N}$: $B(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq X \setminus A$, d.h. es gäbe $x \neq x_n \in A$ mit $d(x, x_n) < 1/n$, also $x_n \to x$. Da x Häufungspunkt von A ist, folgt aus (2), dass $x \in A$.

□

Definition. Abschluss von A: $\overline{A} := A \cup \{\text{Häufungspunkte von } A\}$ heißt der **Abschluss von** A . Da Häufungspunkte von Häufungspunkten von A wieder Häufungspunkte von A sind, enthält $\overline{A}$ sämtliche Häufungspunkte von $\overline{A}$, ist also nach dem Satz abgeschlossen. $\overline{A}$ ist dann die **kleinste** abgeschlossene Menge, die A enthält, da die Häufungspunkte von A (zumindest) noch hinzukommen müssen. Da der Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, ist $\bigcap\{B \mid B \supseteq A,\ B \text{ abgeschlossen}\}$ ebenfalls abgeschlossen, und deshalb die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. Also gilt

$$\overline{A} = A \cup \{\text{Häufungspunkte von } A\} = \bigcap_{B \supseteq A} \{B \mid B \text{ abgeschlossen}\} .$$

6.5 Konvergenz in normierten Räumen

Definition. Sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, $A \subset X$ heißt **beschränkt** $:\Leftrightarrow \sup\limits_{x\in A} ||x|| < \infty$. Analog für Folgen.

- Falls in $(X, ||\cdot||) : x_n \to x,\ y_n \to y,\ \alpha \in \mathbb{K}$, so $x_n \pm y_n \to x \pm y,\ \alpha x_n \to \alpha x$.
- In $(X, ||\cdot||)$: (x_n) konvergent $\Leftrightarrow$ (x_n) ist beschränkt und besitzt **genau** einen Häufungspunkt.

Definition. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, auf dem zwei Normen $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ gegeben sind. Die Normen heißen **äquivalent** $:\Leftrightarrow \exists c > 0\ \forall x \in X\ \ c^{-1}||x|| \le ||x||' \le c||x||$.

Dann ist $B(0, \varepsilon/c) = c^{-1}B(0,\varepsilon) \subseteq B'(0,\varepsilon) \subseteq cB(0,\varepsilon) = B(0, c\varepsilon),\ B(x,\varepsilon) = \{x\} + B(0,\varepsilon)$.
Also: U offen in $(X, ||\cdot||) \Leftrightarrow U$ offen in $(X, ||\cdot||')$ sowie:
(x_n) konvergiert in $(X, ||\cdot||) \Leftrightarrow (x_n)$ konvergiert in $(X, ||\cdot||')$ (gegen das gleiche x).
denn: $(||x - x_n|| < \varepsilon \Rightarrow ||x - x_n||' < c\ \varepsilon)$.

Beispiel: Die Normen $||\cdot||_1,\ ||\cdot||_2$ und $||\cdot||_\infty$ auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent,

$$||x||_\infty \le ||x||_2 \le ||x||_1 \le n\ ||x||_\infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n,\ c := n\ .$$

In der Tat sind auf dem $\mathbb{R}^n$ **alle** Normen äquivalent; wir zeigen das später.

Satz. *Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge, d.h. $x_m = (x_{m,j})_{j=1}^n$. Äquivalent:*

(1) $x_m \to x$ *in* $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$, $x = (x_j)_{j=1}^n$.

(2) $x_{m,j} \to x_j$ *in* $\mathbb{R}$ *für alle* $j = 1, \ldots, n$.

Beweis.(1) $\Rightarrow$ (2). Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $m_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\forall m \ge m_0$

$$|x_{m,j} - x_j| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_{m,i} - x_i|^2\right)^{1/2} < \varepsilon$$

für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Zu $\varepsilon > 0$ sei $\varepsilon' = \varepsilon/\sqrt{n}$: $\exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \ge m_0,\ \underset{\text{(sukzessive)}}{j \in \{1, \ldots, n\}}\ |x_j - x_{m,j}| < \varepsilon'$.
$\Rightarrow ||x - x_m||_2 \le \sqrt{n} \cdot \varepsilon' = \varepsilon$. □

Da auf dem $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind, ist die **koordinatenweise** Konvergenz stets äquivalent zur Konvergenz auf dem $\mathbb{R}^n$ unter **irgendeiner** beliebigen Norm!

Bolzano-Weierstraß. Jede beschränkte Folge im $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis. Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, $x_m = (x_{m,j})_{j=1}^n$. Dann gilt für alle $j \in \{1, \cdots, n\}$, dass $(x_{m,j})_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat $(x_{m,1})$ eine konvergente Teilfolge $(x_{m_\ell,1})$; $(x_{m_\ell,2})$ hat eine wieder eine konvergente Teilfolge $(x_{m_{\ell_k},2})$ etc. Also existiert eine Teilfolge (m_p) von (m) mit: $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$ $(x_{m_p,j}) \to: x_j$ für $p \to \infty$. Dann gilt: $x_{m_p} \to x := (x_j)_{j=1}^n$ nach dem vorigen Satz. □

Beispiel. $I \subset \mathbb{R}$ kompakt, $(C(I), ||\cdot||_\infty)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(I)^{\mathbb{N}}, f \in C(I)$. Dann gilt:
$f_n \to f$ in $||\cdot||_\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ ||f_n - f||_\infty \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0, x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad f_n \to f \text{ ist gleichmäßig konvergent.}
\end{aligned}$$

6.6 Cauchyfolgen und Vollständigkeit

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist **Cauchyfolge** $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0\ \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$$\text{(in normierten Räumen } ||x_n - x_m|| < \varepsilon) .$$

– Konvergente Folgen sind Cauchyfolgen (Dreiecksungleichung).
Umkehrung galt in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, ist aber in allgemeinen metrischen Räumen falsch.

Definition. (X, d) ist metrischer Raum, X heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow$ Jede Cauchyfolge (x_n) in X konvergiert gegen ein $x \in X$.
Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**,
ein vollständiger Prähilbertraum heißt **Hilbertraum**.
Bei äquivalenten Normen sind Cauchyfolgen und Vollständigkeit wieder gleichbedeutend.
Von unseren bisherigen Beispielen sind vollständig:

Satz 1. (a) $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ *ist vollständig.*

(b) $(C(I), ||\cdot||)_\infty)$ *ist vollständig.*

Beweis.

(a) Sei $(x_m)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Cauchyfolge, $x_m = (x_{m,j})_{j=1}^n$. Dann ist $(x_{m,j})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert $x_{m,j} \to: x_j \in \mathbb{R}$ für $m \to \infty$. Also konvergiert $x_m \to x := (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ in $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ gemäß dem Satz in 6.5 .

(b) Sei $(f_n) \subseteq C(I)$ eine Cauchyfolge. Dann ist $(f_n(x))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ für alle $x \in I$. Also $f_n(x) \to: f(x) \in \mathbb{R}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:
$\forall m, n \geq 0, x \in I$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Es folgt: $\forall n \geq n_0$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Also ist $f_n \to f$ **gleichmäßig** konvergent. Nach 5.19 ist f stetig, $f \in C(I)$.

$\square$

Beispiel: $(C(I), ||\cdot||_1)$ mit $||f||_1 = (\int\limits_I |f(t)|dt)$ ist nicht vollständig:

$$I = [-1,1], \qquad f_n(t) = \begin{Bmatrix} 1 & 1/n \leq t \leq 1 \\ nt & 0 < t < 1/n \\ 0 & -1 \leq t \leq 0 \end{Bmatrix} .$$

Für $m > n$ ist $||f_n - f_m||_1 \leq \frac{1}{2n} \to 0$ $(n \to \infty)$: Also ist (f_n) Cauchyfolge. Die "Grenzfunktion" $f(t) = H(t)$ ist aber **unstetig**.

Satz 2. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist in (der induzierten Metrik) vollständig.*

Beweis. Sei $A \subseteq (X,d)$ abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(A, d\mid_{A\times A})$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch Cauchyfolge in (X,d) . Die Vollständigkeit von (X,d) impliziert, dass $x_n \to x \in X$ in X konvergiert. Also ist x Häufungspunkt von A . Da A abgeschlossen in X ist, folgt: $x \in A,\ x_n \to x$ in $(A, d\mid_{A\times A})$. $\square$

Formale Übertragung der absoluten Konvergenz in Banachräumen:

Satz 3. *Sei X ein Banachraum, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ eine Reihe in X mit $\sum\limits_n ||x_n|| < \infty \Rightarrow \sum\limits_n x_n$ konvergent (für jede Anordnung!) und $||\sum\limits_n x_n|| \leq \sum\limits_n ||x_n||$.*

Analoge Varianten des Majoranten-, Wurzel-, Quotientenkriteriums gelten in Banachräumen.

6.7 Stetigkeit

Definition. Seien $(X,d), (Y,d')$ metrische Räume und sei $x_0 \in X$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist **stetig in** $x_0 \in X$:$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \quad (d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0) < \varepsilon) .$$

[Im normierten Fall: $||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$.]

Definition. Seien $(X,d), (Y,d')$ metrische Räume und $x_0 \in X$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ **hat für** $x \to x_0$ **den Limes** ξ :$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \quad (0 < d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), \xi) < \varepsilon) .$$

[Also: f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$]

Definition. $f : X \to Y$ ist **stetig** :$\Leftrightarrow$ f ist stetig in allen Punkten $x_0 \in X$.

Satz 1. *Seien* $(X,d),(Y,d')$ *metrische Räume und sei* $f:X\to Y$. *Dann gilt:*

(1) f *ist stetig in* $x_0\in X \Leftrightarrow \forall x_n\in X \quad (\lim_n x_n = x \Rightarrow \lim_n f(x_n)=f(x_0))$
(Übertragungsprinzip)

(2) f *ist stetig* $\Leftrightarrow \forall U$ *offen in* $Y \quad f^{-1}(U)$ *offen in* X .

Beweis. Analog zu Kap. 3.

Satz 2. *Seien* X,Y,Z *metrische Räume und* $f:X\to Y,\ g:Y\to Z$ *stetig. Dann ist auch* $g\circ f: X\to Z$ *stetig.*

Satz 3. *Seien* X,Y *normiert,* $\alpha\in\mathbb{K},\ A\subset X,\ f,g:A\to Y$ *stetig. Dann sind* $f\pm g, \alpha f, ||f(\cdot)||$ *stetig.*

Beispiele für stetige Funktionen: Punktbewegung auf einer Kurve im $\mathbb{R}^3$:
$f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, Elektrisches Feld, Gravitationsfeld im $\mathbb{R}^3$: $f:A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,
Zeitabhängiges Feld im $\mathbb{R}^3$: $f:A\subset\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$,
Temperatur, ort- und zeitabhängig: $f:A\subset\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$,
Daher sind insbesondere Funktionen $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ interessant; $n,m\in\mathbb{N}$.
In diesem Fall wird f durch Koordinatenfunktionen $f_i:A\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,m)$ bestimmt,
$f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_m\end{pmatrix}$. Da die Konvergenz im $\mathbb{R}^m$ äquivalent zur koordinatenweisen Konvergenz ist, folgt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist stetig in } x_0\in A \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x_\ell\in A\to x_0\in A \quad f(x_\ell)\to f(x_0) \text{ in } \mathbb{R}^m \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x_\ell\in A\to x_0\in A,\ j\in\{1,\dots,m\}\ f_j(x_\ell)\to f_j(x_0) \text{ in } \mathbb{R}\ . \\ &\Leftrightarrow \quad \text{Alle Koordinatenfunktionen } f_1,\dots,f_m:\ A\to\mathbb{R} \text{ sind stetig in } x_0\in A\ . \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $(x_\ell\to x_0\Rightarrow f_j(x_0)\to f_j(x_0))$ für $x_\ell=(x_{\ell,i})_{i=1}^n,\ x_0=(x_i)_{i=1}^n$:

$$(x_{\ell,i}\overset{\ell\to\infty}{\to} x_i;\ i=1,\dots,n)\Rightarrow (f_j(x_{\ell,1},\dots,x_{\ell,n})\overset{\ell\to\infty}{\to} f_j(x_1,\dots,x_n);\ j=1,\dots,m)\ .$$

Es reicht also, $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ zu betrachten.

Polynome $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ f(x_1,\dots,x_n)=\sum\limits_{k_1,\dots,k_n}\alpha_{k_1\dots k_n}\,x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$ (endliche Summe).
Polynome sind stetig, nach den Regeln aus Satz 3.

Rationale Funktionen. Seien p,q Polynome und $f=p/q$ eine rationale Funktion. Dann ist f stetig in $x_0\in\mathbb{R}^n$, sofern $q(x_0)\neq 0$ ist.

Komposition. Ersetzt man in $g(y_1,\dots,y_m)$ die Variablen $y_1,\dots,y_m$ durch stetige Funktionen $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)$, so ist für stetiges g die Komposition $h(x_1,\dots,x_n):=g(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n))$ stetig in $(x_1,\dots,x_n)$.

Lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(Ax)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ sind automatisch stetig (bzgl. $||\cdot||_2$), da lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j$ für alle $(a_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ stetig sind; sie sind spezielle Polynome.

Warnung: Lineare Abbildungen zwischen beliebigen normierten Räumen sind i.a. unstetig, siehe unten (Differentiation).

$\int : C(I) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int\limits_I f(t)dt$ ist stetig und linear, da $f_n \to f$ in $C(I)$ gleichmäßige Konvergenz bedeutet, also nach 5.19 $\int\limits_I f_n \to \int\limits_I f$ konvergiert.

Beispiel. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist i.a. **nicht** stetig, wenn nur die Einschränkung von f auf eine Komponente bei festgehaltenen anderen stetig ist: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $f(x,y) := \left\{\begin{matrix} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{matrix}\right\}$: f ist stetig in allen Punkten $(x,y) \neq 0$, aber unstetig in 0, da $(1/n, 1/n) \to 0$, aber $f(1/n, 1/n) = 1/2 \to 1/2 \neq 0$.
Für $y = 0$ ist $f(x, 0) = 0$ stetig in x und für $x = 0$ ist $f(0, y) = 0$ stetig in y.

6.8 Kompaktheit

Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$.

a) K heißt **kompakt** $:\Leftrightarrow$ Jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d.h.
$\forall (O_i)_{i\in I}$ offen in X $\quad (K \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i) \Rightarrow (\exists \underset{i_1,\ldots,i_n \in I}{n \in \mathbb{N}} \;\; K \subset \bigcup_{j=1}^{n} O_{i_j})$.

b) K ist **totalbeschränkt** $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in K \quad K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

c) K heißt **folgenkompakt** $:\Leftrightarrow$ Jede Folge in K hat eine gegen ein Element **aus** K konvergente Teilfolge.

Mit (6.4) ist K folgenkompakt, wenn jede Folge in K einen Häufungspunkt **in** K hat.

Kontraposition. K ist kompakt $\Leftrightarrow$
$[\forall (A_i)_{i\in I} \subset K$ abgeschlossen $\quad (\forall n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I \; \bigcap\limits_{j=1}^{n} A_{i_j} \neq \emptyset) \Rightarrow (\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset)$]
Offene Überdeckungseigenschaft $\Leftrightarrow$ Endliche Durchschnittseigenschaft.

Theorem 1. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subset X$. Dann sind äquivalent:*

(1) *K ist kompakt.*

(2) *K ist folgenkompakt.*

(3) *K ist vollständig und totalbeschränkt.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Wäre **kein** Punkt $y \in K$ Häufungspunkt von (x_n) , würde es für alle $y \in K$ eine Umgebung U von y geben mit $U \cap \{x_1, x_2, \cdots\} = \begin{Bmatrix} \emptyset & y \notin \{x_1, x_2, \cdots\} \\ \{y\} & y \in \{x_1, x_2, \cdots\} \end{Bmatrix}$. Wir würden dann ein $\varepsilon_y > 0$ mit $|B(y, \varepsilon_y) \cap \{x_1, x_2, \cdots\}| \leq 1$ finden. Da $K \subseteq \bigcup\limits_{y\in K} B(y, \varepsilon_y)$ und K kompakt ist, gäbe es $y_1, \ldots, y_n \in K$ mit $\{x_1, x_2, \cdots\} \subseteq K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon_{y_j})$. Das ist ein Widerspruch, da $|\{x_1, x_2, \cdots\} \cap B(y, \varepsilon_y)| \leq 1$ ist und $\{x_1, x_2, \cdots\}$ eine unendliche Menge ist.
(2) $\Rightarrow$ (3). Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Cauchyfolge. Gemäß (2) hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge in K , (x_{n_k}) , $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} x \in K$.
Behauptung: Die gesamte Folge (x_n) konvergiert auch, also $x_n \to x$ $(n \to \infty)$.
Wir wissen: $(\varepsilon > 0 : \ \exists n_0 \ \forall m \geq n \geq n_0 \ d(x_n, x_m) < \varepsilon)$.
Ferner existiert $k_0 \in \mathbb{N}, n_{k_0} \geq n_0$ mit $d(x_{n_{k_0}}, x) < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ folgt also:

$$d(x_n, x) < d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x) < 2\varepsilon \ .$$

Somit ist jede Cauchyfolge konvergent und K ist vollständig.
Angenommen, K sei nicht totalbeschränkt: Dann gäbe es $\varepsilon > 0$ mit:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in K \quad K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \ .$$

Mit diesem $\varepsilon > 0$ findet man sukzessive eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ für $i \neq j$: Hat man das für $1 \leq i \neq j \leq n-1$ gefunden, wähle $x_n \in K \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon))$, d.h. $d(x_n, x_i) \geq \varepsilon$ für $i < n$ (Induktive Definition).
Die Folge (x_n) kann keine konvergente Teilfolge haben; aus $d(x_{m_k}, y) < \varepsilon/2$ für $k \geq k_0$ würde nämlich $d(x_{m_k}, x_{m_\ell}) < \varepsilon$ folgen, sofern $k, \ell \geq k_0$ ist. Das ist ein Widerspruch.
(3) $\Rightarrow$ (1) K werde durch offene Mengen O_i überdeckt, $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$. Angenommen, es gäbe zu dieser offenen Überdeckung keine endliche Teilüberdeckung. Wegen der Totalbeschränktheit von K gibt es $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n_1} B(x_i, \frac{1}{2})$. Nicht jede Menge $K \cap B(x_i, \frac{1}{2})$ kann von endlich vielen O_i überdeckt werden, etwa $B_1 = B(x_1, \frac{1}{2}) \cap K$ nicht. Aber $B_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n_2} B(x_{1i}, \frac{1}{2^2})$. Wieder existiert $i \in \{1, \ldots, n_2\}$, o.B.d.A. $i = 1$ mit:

$$B_2 := B(x_{11}, \frac{1}{2^2}) \cap K \text{ wird nicht von endlich vielen } O_i \text{ überdeckt.}$$

Etc. $x^{(i)} := \underbrace{x_{11\ldots1}}_{i}$: $(x^{(i)})$ ist Cauchyfolge in K . Da K vollständig ist, existiert $x \in K$ mit $x^{(i)} \to x$. Das Grenzelement x liege in O_j, $x \in O_j$. Da O_j offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset O_j$. Für $i \geq i_0$ ist dann aber $x^{(i)} \in B(x, \varepsilon) \subseteq O_j$: Für großes i folgt also $B(x^{(i)}, \frac{1}{2^i}) \subseteq O_j$: Somit wird $B(x^{(i)}, \frac{1}{2^i})$ schon von **einem** O_j überdeckt. Das ist ein Widerspruch. $\square$

Satz. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt:*

(1) *Ist X kompakt und A abgeschlossen, ist A kompakt.*

(2) *Ist A kompakt, ist A abgeschlossen.*

Beweis.

(1) X kompakt $\Rightarrow X$ totalbeschränkt. $\Rightarrow A$ totalbeschränkt.

X kompakt $\Rightarrow X$ vollständig, A abgeschlossen $\overset{6.6}{\Rightarrow}$ A vollständig.

(2) A kompakt $\overset{\text{Theorem}}{\Rightarrow}$ A vollständig $\Rightarrow A$ abgeschlossen ($x_n \in A \to x \in \overline{A} \Rightarrow$ $x_n \to x$ in A) .

□

Korollar (Satz von Heine-Borel)**.** *Sei $K \in \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:*

(1) *K ist kompakt.*

(2) *K ist abgeschlossen und beschränkt.*

Insbesondere: Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist K kompakt genau dann, wenn $K = [a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist.
Somit ist $(0,1)$ nicht kompakt: Man hat $(0,1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$, aber $(0,1) \not\subseteq$ **endlicher** Vereinigung von Intervallen der Form $(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2). K ist kompakt $\Rightarrow$ K ist vollständig $\Rightarrow$ K ist abgeschlossen. Ferner: K ist totalbeschränkt $\Rightarrow$ K ist beschränkt (endlich viele 1-Kugeln überdecken K).

(2) $\Rightarrow$ (1). K ist beschränkt $\Rightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ lässt sich K von endlich vielen $B(x_i, \varepsilon)$-Kugeln im $||\cdot||_2$ oder $||\cdot||_\infty$-Sinn überdecken: K ist totalbeschränkt. Ferner gilt: K abgeschlossen $\Rightarrow$ K vollständig. Nach dem Theorem ist K kompakt.

□

Bemerkung. Der Satz ist in unendlichdimensionalen Räumen i.a. falsch; dann gilt nur (1) $\Rightarrow$ (2).

6.9 Maximumssatz für stetige Funktionen

Satz 4. *Seien $(X,d),(Y,d')$ metrische Räume, $A \subseteq X$ kompakt und sei $f: A \to Y$ stetig. Dann gilt:*

(1) *$f(A)$ ist kompakt.*

(2) *Für $Y = \mathbb{R}$ nimmt f sein Maximum und Minimum in A an.*

Bemerkung. Falls X metrisch oder normiert ist, gilt (2) i.a. nicht mehr für (nur noch) beschränkte und abgeschlossene Mengen A .

Beweis.

(1) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(A)$ eine Folge, d.h. $y_n = f(x_n),\ x_n \in A$. Da A kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to: x \in A$. Da f stetig ist, folgt $f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(A)$. Also ist $f(A)$ folgenkompakt, und nach dem Theorem ist $f(A)$ kompakt.

(2) Das Maximum von f wird angenommen: $f(A) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, also beschränkt und abgeschlossen. Sei $y := \sup\limits_{x\in A} f(x) (\in \mathbb{R})$. Es gibt eine Folge $y_j \in f(A)$ mit $y_j \to y$. Da $f(A)$ abgeschlossen ist, folgt $y \in f(A),\ y = f(x_0)$ mit $x_0 \in A\ :\ \sup\limits_{x\in A} f(x) = f(x_0)$. Das Supremum von f wird also als Maximum angenommen.

Anwendung:

Satz. *Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

(Die Äquivalenzkonstante hängt aber von n ab!)

Beweis. Sei $||\cdot||$ eine beliebige Norm, $||\cdot||_1$ die 1-Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$||x|| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ ||e_i|| \le c||x||_1 \text{ mit } c := \max_{1\le i\le n}\ ||e_i|| < \infty\ .$$

Um $d||x||_1 \le ||x||$ für ein $d > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ zu zeigen, sei

$$d := \inf\{||x||\ |\ ||x||_1 = 1,\ x \in \mathbb{R}^n\}\ .$$

Da $\{x \in \mathbb{R}^n\ |\ ||x||_1 = 1\}$ beschränkt und abgeschlossen, also nach Heine-Borel kompakt ist, und $||\cdot|| : (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1) \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto ||x||$, wegen $||x|| \le c||x||_1$ stetig ist, wird das Infimum als Minimum angenommen: Es gibt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||x||_1 = 1$ und $d = ||x||$. Also ist $x \ne 0,\ d > 0$. Die Homogenität der Norm impliziert dann für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$d\ ||x||_1 \le ||x|| \le c||x||_1\ .$$

6.10 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition. Seien $(X,d),(Y,d')$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig** :$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in X \quad (d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Gleichmäßig stetige Funktionen sind also stetig. Die Umkehrung gilt i.a. **nicht**. Man hat aber:

Satz. *Sei $f : X \to Y$ stetig und X kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Typisches Kompaktheitsargument mit Überdeckungseigenschaft: Sei $\varepsilon > 0$. Da f in $x \in X$ stetig ist, gibt es $\delta_x > 0$ mit:

$$f(B(x,\delta_x)) \subseteq B(f(x), \frac{\varepsilon}{3}) \; .$$

Nun ist $X = \bigcup\limits_{x \in X} B(x, \frac{\delta_x}{3})$. Da X kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{3})$. Sei $\delta := \min\limits_{1 \le j \le n} \delta_{x_j}$. Dann ist $\delta > 0$ und für alle $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \frac{\delta}{3}$ gilt: $\exists j, k \in \{1, \ldots, n\}$ $d(x, x_j) < \frac{\delta_{x_j}}{3}$, $d(y, y_k) < \frac{\delta_{x_k}}{3}$. Sei $\delta_{x_j} \le \delta_{x_k}$. Dann folgt

$$d(x_j, x_k) \le d(x_j, x) + d(x,y) + d(y, x_k) < \delta_{x_k} \; , \; x_j \in B(x_k, \delta_{x_k}) \; .$$

Also $d(f(x_j), f(x_k)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Wegen $x \in B(x_j, \delta_{x_j})$ ist $d(f(x), f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{3}$ und analog $d(f(x_k), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Zusammen ergibt sich $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. □

Der Beweis zeigt, dass die Überdeckungseigenschaft mit “sehr vielen” offenen Umgebungen angewandt wird (das ist typisch!).

6.11 Stetigkeit linearer Abbildungen

Da alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, ist die Stetigkeit von Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unabhängig von speziellen Normen. Lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ waren stets stetig. I.a. gilt:

Satz. *Seien X, Y normiert und sei $T : X \to Y$ linear. Dann gilt:*

$$(T \textit{ist stetig } \Leftrightarrow ||T||_{op} := \sup_{||x||=1} ||Tx|| < \infty) \; .$$

Bemerkung: $L(X,Y)$ ist ein normierter Raum unter $|| \cdot ||_{op}$, $||TS||_{op} \le ||T||_{op} ||S||_{op}$, und $L(X,Y)$ ist vollständig, falls Y vollständig ist (Übung).

Beweis. “$\Leftarrow$” $||T||_{op} \overset{(*)}{=} \sup\limits_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||} = \sup\limits_{||x|| \le 1} ||Tx|| < \infty$ unter Benutzung der Homogenität der Norm. Zu $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \varepsilon / ||T||_{op}$. Dann gilt: $||x - y|| < \delta \Rightarrow$

$$||Tx - Ty|| = ||T(x-y)|| \overset{(*)}{\le} ||T||_{op} ||x-y|| \le ||T||_{op} \cdot \delta = \varepsilon \; .$$

"$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon = 1$. Da T stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit: $(||x|| < \delta \Rightarrow ||Tx|| < 1)$ ($y = 0$ setzen). Somit folgt für $z \in X$, $||z|| = 1$: $(||\frac{\delta}{2}z|| < \delta \Rightarrow \frac{\delta}{2}||Tz|| = ||T(\frac{\delta}{2}z)|| < 1)$, d.h. $\sup\limits_{||z||=1} ||Tz|| = ||T||_{op} \leq 2/\delta$. $\square$

Bemerkung. Sind $||\cdot||_1^X, ||\cdot||_2^Y$ äquivalente Normen auf X und $||\cdot||_1^X, ||\cdot||_2^Y$ äquivalente Normen auf Y , so sind $||T : (X, ||\cdot||_1^X) \to (Y, ||\cdot||_1^Y)||$ und $||T : (X, ||\cdot||_2^X) \to (Y, ||\cdot||_2^Y)||$ äquivalente Operatornormen: Eine Norm ist endlich $\Leftrightarrow$ Die andere Norm ist endlich.

Beispiele.

1) $X = \mathbb{R}^n$, $||x||_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$, $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n : X \to X$. Dann gilt $||T||_{op} = \sup\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{j=1}^n |t_{ij}|$ "**Spaltensummennorm**".

2) Analog $X = \mathbb{R}^n$, $||\cdot||_\infty$: "**Zeilensummennorm**" (Übung).

3) $\frac{d}{dx} : (C^1(I), ||\cdot||_\infty) \to (C(I), ||\cdot||_\infty)$ ist unbeschränkt, da $\frac{d}{dx}(\sin nx) = n \cos nx$ gilt, also $||\frac{d}{dx}||_{op} \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist : $\frac{d}{dx}$ ist **unstetig**, aber **linear**.