Lösung Aufgabe 44
Seien $(x_i,\ y_i) \in \mathbb{R}^2$ für $i = 1, ..., n$, wobei mindestens zwei der x_i verschieden seien und

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f((a, b)) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

die Funktion der Fehlerquadrate.
Behauptung.
Für $a_0 := \frac{n<x,y>-<x,\mathbb{1}><y,\mathbb{1}>}{n<x,x>-<x,\mathbb{1}>^2}$ und $b_0 := \frac{<x,x><y,\mathbb{1}>-<x,y><x,\mathbb{1}>}{n<x,x>-<x,\mathbb{1}>^2}$ nimmt f in (a_0, b_0) sein Minimum an, wobei hier $\mathbb{1} := (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$.
Beweis.
Setze $x := (x_1, ..., x_n)$, $y := (y_1, ..., y_n)$.
Nun ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \mapsto \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ (für festes b) differenzierbar mit Ableitung $g'(a) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i$ und damit f stetig partiell differenzierbar nach x.
Ebenso ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ b \mapsto \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ differenzierbar (für festes a) mit Ableitung $h'(b) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)$ und damit f stetig partiell differenzierbar nach y.
Damit ist f total differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} f'((a, b)) &= 2 \left(\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i,\ \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \right) \\ &= 2(< x, x > a+ < x, \mathbb{1} > b- < x, y >,\ < x, \mathbb{1} > a + nb- < y, \mathbb{1} >) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\frac{1}{2} f''((a, b)) = \frac{1}{2} \operatorname{Hess} f((a, b)) = \begin{pmatrix} < x, x > & < x, \mathbb{1} > \\ < x, \mathbb{1} > & n \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, dass die Hessematrix positiv definit ist berechnen wir die Unterdeterminanten. Dazu stellen wir zunächst fest, dass mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung gilt:

$$< x, \mathbb{1} > \quad \leq \quad \sqrt{< x, x >}\sqrt{< \mathbb{1}, \mathbb{1} >} = \sqrt{n}\sqrt{< x, x >},$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $x = \lambda \mathbb{1}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Da mindestens zwei der x_i verschieden sind, folgt:

$$< x, \mathbb{1} >^2 \quad < \quad n < x, x >$$

und damit

$$\det \left(\frac{1}{2} f''((a, b)) \right) = n < x, x > - < x, \mathbb{1} >^2 \quad > 0.$$

Mit $< x, x >= ||x||^2 > 0$ ($x \neq 0$ nach Voraussetzung) folgt, dass $\operatorname{Hess} f((a, b))$ für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ positiv definit ist, f kann also nur Minima besitzen.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & f'((a_0, b_0)) = 0 \\ \iff & \begin{pmatrix} < x, x > & < x, \mathbb{1} > \\ < x, \mathbb{1} > & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < x, y > \\ < y, \mathbb{1} > \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{n < x, x > - < x, \mathbb{1} >^2} \begin{pmatrix} n & - < x, \mathbb{1} > \\ - < x, \mathbb{1} > & < x, x > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} < x, y > \\ < y, \mathbb{1} > \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit nimmt f sein Minimum genau in (a_0, b_0) wie in der Behauptung an.