Prof. Dr. J. Heber
Dr. T. Johansen
H. Bloch

WS 2007/08

Klausur zur Analysis I

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben werden jeweils maximal 4 Punkte vergeben. Zu bearbeiten sind für Studierende in

- *2-Fächer-Bachelor-Studiengängen*: alle nicht mit (L) markierten Aufgaben,
- *allen anderen Studiengängen*: alle Aufgaben.

Wenn Sie mindestens die Hälfte der für Sie erreichbaren Punkte erzielt haben, ist die Klausur bestanden. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.

1. Wie lautet
   (a) für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ die Definition der Begriffe "untere Schranke" und "Infimum"?
   (b) für eine Funktion $f : X \to Y$ die Definition der "Injektivität"?

2. Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}$ – sofern sie existieren – und untersuchen Sie, ob ein Minimum beziehungsweise ein Maximum vorliegt (jeweils mit Beweis!):
$$\left\{(-1)^m - \frac{5}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

3. Es seien z, w komplexe Zahlen. Zeigen Sie:
$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2 \cdot (|z|^2 + |w|^2).$$

4. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch
$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$
   Zeigen Sie (ggf. durch vollständige Induktion):
   (a) Die Folge ist durch 4 nach oben beschränkt.
   (b) Die Folge ist monoton wachsend.
   (c) Die Folge ist konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} \cdot (3 + \sqrt{5})$.

(L) 5. Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Produktfolge $(a_k \cdot b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

6. Beweisen Sie Konvergenz oder Divergenz der Folgen und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:
$$\left(\frac{3n^2 + 13n - \sqrt[n]{3}}{n^2 - 2}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\frac{n^3 + 3}{n^2 + 2}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

7. Beweisen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot k^k}{(k!)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{k}}{k+1}.$$

Bitte wenden!

8. Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit/Unstetigkeit **nur in** $x_0 = 1$ **und in** $x_1 = 2$:

$$f\colon [0,3] \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \begin{cases} x^2+3 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x+3 & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

9. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte $-1 \leq f(x) \leq 1$. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

10. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung von f.

(L) 11. Gegeben sei die Funktion $f\colon [1,9] \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2 - \sqrt{x}$. Zeigen Sie:

(a) Der Wertebereich von f ist $[0,78]$.

(b) Die Funktion $\widetilde{f}\colon [1,9] \to [0,78]\,, x \mapsto f(x)$ besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion $g\colon [0,78] \to [1,9]$.

(c) Berechnen Sie $g'(14)$.

Viel Erfolg!