Prof. Dr. H. König

WS 2008/09

Nachklausur zu "Analysis I"
06.04.2009, 9-12 Uhr

Geben Sie bitte jede der Aufgaben unter C und D auf **separaten** Blättern ab, **sortiert** in der Reihenfolge der Aufgabenstellung und jeweils versehen mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Für B können Sie **ein** Blatt verwenden, die richtige Antwort zu den Multiple-Choice-Aufgaben A kreuzen Sie bitte direkt auf diesem Blatt an. Die beiden Aufgaben unter $\mathbf{D_W}$ sollen von **1-Fach BA-** und Diplomstudierenden, die beiden Aufgaben unter $\mathbf{D_L}$ von **2-Fach BA-** und Lehramtstudierenden (POL I) bearbeitet werden.

A. 1. Die inverse Funktion von $\sqrt{x}$ ($\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$) ist
a) $1/\sqrt{x}$, b) x^2 , c) $-\sqrt{x}$. (1/2 P.)

2. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x_n = (-1)^n/n + 1/n$ hat
a) einen Häufungspunkt , b) zwei Häufungspunkte, c) keinen Häufungspunkt. (1/2 P.)

3. Ist $ln\ ((10^x)^2)$ gleich
a) $2x\, ln\,(10)$, b) $x^2\, ln\,(10)$, c) $2x$? (1/2 P.)

4. Ist $\cos(x-y)$ gleich
a) $\cos x\ \cos y - \sin x\ \sin y$
b) $\sin x\ \cos y - \sin y\ \cos x$
c) $\cos x\ \cos y + \sin x\ \sin y$? (1/2 P.)

B. 1. Geben Sie die präzise Definition der Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (mit Quantoren) an. (1 P.)

2. Formulieren Sie die Bernoulli-Ungleichung mit Angabe des maximalen Gültigkeitsbereiches (in $\mathbb{R}$). (1 P.)

3. Geben Sie die genaue Definition der Injektivität und der Surjektivität einer Funktion $f : M \to N$ (mit Quantoren) an. (1 P.)

4. Formulieren Sie die Negation der Stetigkeit einer Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. (1 P.)

5. Wie lautet der Satz über das Cauchy-Produkt von Reihen $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x_n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} y_n$ (mit Voraussetzungen) ? (1 P.)

C. 1. Man beweise mittels Induktion über $n \in \mathbb{N}$ (ohne weitere Ergebnisse zu benutzen), dass gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (3j^2 - j) = n^2(n+1).$$

(4 P.)

2. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und Divergenz (mit Begründungen)
a) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{n}}{3^n}$, b) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{(n+1)^3}$, c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\,log_2(log_2 n)}$. (4 P.)

3. Untersuche die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$x_n = \frac{(n+1)^{50}}{n^{48}(n+2)^2}\,(1-\frac{1}{n})^n \quad ,$$

und bestimme ggf. den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. (4 P.)

4. Bestimmen Sie die Menge

$$M := \left\{ x \in [-20, 10) \;\middle|\; \left|\frac{2x+1}{x-10}\right| > 1 \right\}$$

als Vereinigung von Intervallen, mit Begründung der Rechenschritte. (4 P.)

5. Man zeige durch direkte Benutzung der Definition, dass
$f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/\sqrt{x}$ nicht gleichmäßig stetig ist. (4 P.)

D_W

6. Bestimme die Zahlen a, b, c in

$$\cos(4x) = a\;\cos^4(x) + b\;\cos^2(x) + c\,.$$

Berechne damit $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ in Radikalschreibweise (d. h. mit Wurzelausdrücken).
$\frac{\pi}{24}$ entspricht 7,5°. (4 P.)

7. Man beweise, dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ ist, ausgehend von der Reihendarstellung der Exponentialfunktion. (4 P.)

D_L

6. Man beweise, dass jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ Cauchyfolge ist. (4 P.)

7. Man zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, streng monoton wachsend ist. Untersuche dazu x_n/x_{n-1}.

Maximale Punktzahl: 35. Viel Erfolg!

Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2011/2012

2. Klausur zu Analysis I

im Studiengang 2-Fach-Bachelor Mathematik

26. März 2012

Für die Bearbeitung der folgenden 6 Aufgaben werden bei vollständig richtiger Bearbeitung jeweils 10 Punkte vergeben. Wer insgesamt 24 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen.
Viel Erfolg!

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

1. Wie lautet
   (a) das Wurzelkriterium für Reihen?
   (b) der Zwischenwertsatz?
   (c) der verallgemeinerte Mittelwertsatz?

2. Sei M die Menge aller Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. Auf M sei eine Relation $\prec$ wie folgt definiert: Für $f, g \in M$ gelte
$$f \prec g \;\Leftrightarrow\; \exists\, x_0 \in (0,1)\; \forall\, x \in [0, x_0] : f(x) \leq g(x)\ .$$
   Ist $\prec$ transitiv? Ist $\prec$ antisymmetrisch?

3. Die Zahlenfolge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 = 1$ und
$$a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$$
   für $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

4. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{n!}\, z^n\ .$$

5. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung
$$2\cos^2 x = 1 + \sin x$$
   im Intervall $[0, 2\pi]$.

6. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = x(\ln x)^3\ .$$