Probe-Klausur

Analysis 1

WS 2014/15

Mittwoch, 17.12.2014

Bei allen Aufgaben müssen vollständige Argumente angegeben werden.

Wenn eine bestimmte Beweismethode nicht vorgeschrieben ist, können alle Sätze und Ergebnisse der Vorlesung verwendet werden

Es gibt zwei verschiedene Versionen von Aufgabe 5, eine für 2-Fach Bachelor und die andere für 1-Fach Bachelor Studenten.

1. (*20 Punkte*)
Es sei K eine Menge und $\mathcal{M}$ eine nichtleere Menge von Teilmengen von K. Beweisen Sie

$$\left(\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M\right)^c = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M^c.$$

2.(*20 Punkte*)
Beweisen Sie mit mathematischer Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

gilt.

3.(*24 Punkte*)
Welche der Reihen konvergieren und welche divergieren?

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad (iii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}$$

Benutzen Sie die in der Vorlesung zur Verfügung gestellten Konvergenz Kriterien.

4.(*20 Punkte*)
Entscheiden Sie, welche der Folgen konvergieren und berechnen Sie die Grenzwerte der konvergenten Folgen.

$$(i) \quad \left\{\frac{2+11n^2}{3n+7}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (ii) \quad \left\{\frac{2}{5n^2+6}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (iii) \quad \left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Sie dürfen alle in der Vorlesung dargestellten Sätze und Lemmata benutzen.

5.(*20 Punkte*) (2-Fach Bachelor)
Benutzen Sie das Heron Verfahren, um $\sqrt{3}$ auf zwei Stellen hinter dem Komma genau zu berechnen. Benutzen Sie $x_1 = 1$.

5.(*20 Punkte*) (1-Fach Bachelor)
Beweisen Sie: Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Benutzen Sie dabei nur die Definitionen der Konvergenzen von Folgen und Reihen.