Probe-Klausur

Analysis 1

WS 2013/14

Mittwoch, 18.12.2013

Bei allen Aufgaben müssen vollständige Argumente angegeben werden.

Wenn eine bestimmte Beweismethode nicht vorgeschrieben ist, können alle Sätze und Ergebnisse der Vorlesung verwendet werden

Es gibt zwei verschiedene Versionen von Aufgabe 5, eine für 2-Fach Bachelor und die andere für 1-Fach Bachelor Studenten.

1. (*18 Punkte*)
Formulieren und beweisen Sie den Satz von Pythagoras.

2.(*18 Punkte*)

Welche der Folgen konvergieren und welche divergieren? Geben Sie für die konvergenten Folgen die Grenzwerte an.

$$(i) \quad \left\{ \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}} \qquad\qquad (ii) \quad \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(iii) \quad \left\{ \frac{2n^5 + 2n^3}{13n^5 + 10n^4} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

.

3.(*24 Punkte*)
Welche der Reihen konvergieren und welche divergieren?

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad\qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(iv) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k$$

4.(*20 Punkte*)

Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, konvergente Folge. Zeigen Sie, dass diese Folge beschränkt ist.

Beweisen Sie dies nur unter Verwendung der Definition der Konvergenz. Benutzen Sie keine Sätze der Vorlesung.

5.(*20 Punkte*) (2-Fach Bachelor)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

5.(*20 Punkte*) (1-Fach Bachelor)
Die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_1 = -\frac{1}{2}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.