Nachklausur

Analysis 1

WS 2014/15

Dienstag, 7. April 2015

Bei allen Aufgaben müssen vollständige Argumente angegeben werden.

Wenn eine bestimmte Beweismethode nicht vorgeschrieben ist, können alle Sätze und Ergebnisse der Vorlesung verwendet werden

Es gibt zwei verschiedene Versionen von Aufgabe 5, eine für 2-Fach Bachelor und die andere für 1-Fach Bachelor Studenten.

1. (*20 Punkte, jede Teilaufgabe 10 Punkte*)
Es sei q eine rationale Zahl. Dann setzen wir

$$S_q = \{p \in \mathbb{Q} | p < q\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass S_q ein Dedekind Schnitt von $\mathbb{Q}$ ist.
(ii) Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in \mathbb{Q}$

$$S_p + S_q = S_{p+q}.$$

gilt.

2. (*20 Punkte, jede Teilaufgabe 5 Punkte*)
Entscheiden Sie, welche Folgen bzw. Reihen konvergieren und welche divergieren:
(i)

$$\left\{ \frac{7n^n - (n+3)^n}{11n^n + 2n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Falls die Folge konvergiert, dann berechnen Sie den Grenzwert.
(ii)

$$\left\{ n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Falls die Folge konvergiert, dann berechnen Sie den Grenzwert.
(iii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$$

(iv)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

3. (*20 Punkte, (i) 5 Punkte, (ii) 7 Punkte, (iii) 8 Punkte*)
(i) Was ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe? Geben Sie die Formel von Cauchy-Hadamard für den Konvergenzradius an.
(ii) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^n x^n$.
(iii) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n}$.

4. (*20 Punkte, jede Teilaufgabe 10 Punkte*)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

gegeben.
(i) Wo ist f differenzierbar?
(ii) Wo ist f' stetig?

5. (2-Fach Bachelor)
(*20 Punkte, (i) 15 Punkte, (ii) 5 Punkte*)

(i) Zeigen Sie mit Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass aus (i) folgt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert.

5. (1-Fach Bachelor)
(*20 Punkte, jede Teilaufgabe 10 Punkte*)

(i) Formulieren Sie den Satz von Rolle und den Mittelwertsatz.
(ii) Beweisen Sie den Mittelwertsatz mit Hilfe des Satzes von Rolle.