Nachklausur
Analysis 1

WS 2013/14 Donnerstag, 10.4.2014

Bei allen Aufgaben müssen vollständige Argumente angegeben werden.

Es gibt zwei verschiedene Versionen von Aufgabe 6, eine für 1-Fach Bachelor und die andere für 2-Fach Bachelor Studenten.

1. (*15 Punkte*)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n^2 < 3^n.$$

2. (*20 Punkte insgesamt, für jede Teilaufgabe 10 Punkte*)

Welche der Folgen konvergieren, welche divergieren? Bestimmen Sie die Grenzwerte, sofern diese existieren.

$$(i) \quad \left\{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad\qquad (ii) \quad \left\{\frac{n!}{3^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

3. (*15 Punkte*)

Es seien A und B beschränkte, nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Die Summe dieser beiden Mengen ist

$$A + B = \{x + y | x \in A \text{ und } y \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

4. (*15 Punkte*)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Es gelte für alle $x \in (a, b)$, dass $f'(x) = 0$. Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass f eine konstante Funktion ist.

5. (*20 Punkte*)

Wir setzen $a_1 = 2$ und für $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

Konvergiert die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? Falls die Folge konvergiert, berechnen Sie den Grenzwert.

6. (*15 Punkte*) (2-Fach Bachelor)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Jede stetige Funktion ist differenzierbar.

Verwenden Sie zum Nachweis nur die Definition der Differenzierbarkeit und die $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit oder die Definition der Folgenstetigkeit.

6. (*15 Punkte insgesamt, (i) 10 Punkte, (ii) 5 Punkte*) (1-Fach Bachelor)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Jede stetige Funktion ist differenzierbar.

(ii) Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Verwenden Sie zum Nachweis nur die Definition der Differenzierbarkeit und die $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit oder die Definition der Folgenstetigkeit.