Klausur

Analysis 1

WS 2010/11

Bei allen Aufgaben müssen vollständige Argumente angegeben werden.

Es gibt zwei Versionen der Aufgabe 7, eine für 1-Fach-Bachelor, die andere für 2-Fach-Bachelor.

1.(*15 Punkte*) Welche der Folgen konvergieren und welche divergieren? Geben Sie für die konvergenten Folgen die Grenzwerte an. Geben Sie vollständige Beweise an.

$$(i) \quad \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (ii) \quad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$(iii) \quad \left(0.999 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(*Hinweis: Sie dürfen alle Ergebnisse der Vorlesung und Übungen benutzen.*)

2.(*10 Punkte*) Gilt die folgende Aussage: Falls eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch. Beweisen oder widerlegen Sie diese Aussage.

3.(*10 Punkte*) (i) Geben Sie die Definition für gleichmäßige Konvergenz an.
(ii) Konvergiert die Folge $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ gleichmäßig? Verwenden Sie beim Nachweis nur die Definition der gleichmäßigen Konvergenz.

4.(*20 Punkte*) (i) Was ist die geometrische Reihe? Gibt es eine Formel für den Grenzwert der geometrischen Reihe?
(ii) Was ist der Verdichtungssatz für Reihen?
(iii) Was ist das Quotientenkriterium für Reihen?
(iv) Was ist das Majorantenkriterium für Reihen?

5.(*15 Punkte*) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

gegeben. Wo ist f stetig und wo ist f differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Behauptung. Sie dürfen alle Sätze aus der Vorlesung und den Übungen verwenden.

6.(*20 Punkte*) (i) Beschreiben Sie in Worten, was der Konvergenzradius einer Potenzreihe ist?
(ii) Geben Sie eine Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe an.
(iii) Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{125} x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^{(2^n)} x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + 2n}{6n^3 + 7} x^n$$

(*Hinweis: Sie dürfen alle Sätze und Ergebnisse der Vorlesung und der Übungen benutzen.*)

7.(1-Fach-Bachelor)(*10 Punkte*) (i) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 + x \leq e^x.$$

(ii) Es sei $a > 1$. Gibt es eine Zahl $c > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$1 + c \cdot x \leq a^x$$

gilt? Beweisen oder widerlegen Sie dies.

7.(2-Fach-Bachelor)(*10 Punkte*) Zeigen Sie, dass für alle x mit $0 < x$

$$\ln(1 + x) < x$$

gilt.