Klausur
Analysis 1

WS 2013/14 Montag, 10.2.2014

Bei allen Aufgaben müssen vollständige Argumente angegeben werden.

Es gibt zwei verschiedene Versionen von Aufgabe 6, eine für 1-Fach Bachelor und die andere für 2-Fach Bachelor Studenten.

1. (*20 Punkte insgesamt, für jede Teilaufgabe 10 Punkte*)
Welche der folgenden Reihen konvergieren und welche divergieren?

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$$

2.(*14 Punkte*)

Benutzen Sie die binomische Formel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \qquad \text{wobei} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ ,$$

und die Definition der Differenzierbarkeit um zu zeigen, dass die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar sind.

Sie brauchen die binomische Formel nicht beweisen.

3.(*16 Punkte insgesamt, für jede Teilaufgabe 8 Punkte*)
Besitzen die folgenden Mengen Supremum, Infimum, Maximum und Minimum? Wenn sie existieren, bestimmen Sie diese.

$$(i) \quad \left\{ \left(-\frac{1}{n}\right)^n \middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \qquad\qquad (ii) \quad \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

4.(*15 Punkte, (i) 10 Punkte, (ii) 5 Punkte*)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2 + x$ definiert.

(i) Entscheiden Sie, ob diese Funktion stetig ist. Verwenden Sie zum Nachweis nur die $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit.

(ii) Entscheiden Sie, ob diese Funktion gleichmäßig stetig ist. Verwenden Sie zum Nachweis nur die $\epsilon - \delta$-Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

5.(*20 Punkte, für jede Teilaufgabe 5 Punkte*)

Es seien

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \\ y_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \end{aligned} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

(ii) $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(iii) $\{x_n - y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

(iv) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und die Grenzwerte sind gleich.

(Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$. Diese Ungleichung müssen Sie nicht beweisen.)

6.(*15 Punkte*) (2-Fach Bachelor)

Es seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, die in $\mathbb{R}$ gegen die Grenzwerte x und y konvergieren. Beweisen Sie:

$$\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen den Grenzwert } x + y.$$

Verwenden Sie dabei nur die Definition der konvergenten Folge.

6.(*15 Punkte*) (1-Fach Bachelor)

Es seien $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen, die in $\mathbb{R}$ gegen die Grenzwerte x und y konvergieren. Beweisen Sie:

$$\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen den Grenzwert } xy.$$

Verwenden Sie dabei nur die Definition der konvergenten Folge.