Klausur

Analysis 1

WS 2010/11

Bei allen Aufgaben müssen vollständige Argumente angegeben werden.

Es gibt zwei Versionen der Aufgabe 7, eine für 1-Fach-Bachelor, die andere für 2-Fach-Bachelor.

1.(*20 Punkte*) Welche der Folgen konvergieren und welche divergieren? Gebe für die konvergenten Folgen die Grenzwerte an. Gebe vollständige Beweise an.

$$(i) \quad \left(\frac{3}{10}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} \qquad\qquad (ii) \quad n^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad n^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad\qquad (iv) \quad \frac{3n^5 + 2n^3}{7n^5 + 10n^4}, \quad n \in \mathbb{N}$$

2.(*15 Punkte*) Welche der Reihen konvergieren und welche divergieren? Gebe vollständige Beweise an.

$$(i) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} \qquad\qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2}$$

3.(*10 Punkte*) Es seien x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine beschränkte Folge reeller Zahlen und y_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge reeller Zahlen, die gegen 0 konvergiert. Dann konvergiert die Folge $x_n \cdot y_n$, $n \in \mathbb{N}$, gegen 0.

Beweise dies nur unter Verwendung der Definition der Konvergenz. Benutze keine Sätze der Vorlesung.

4.(*10 Punkte*) Es seien (a, b) ein Intervall, $x_0 \in (a, b)$ und $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in x_0 stetig sind. Dann ist $f + g$ ist in x_0 stetig. Benutze die $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit.

5.(*15 Punkte*) Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, die in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ stetig ist, ist dort auch differenzierbar.

(ii) Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, die in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar ist, ist dort auch stetig.

Benutze nur die Definitionen der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit.

6.(*15 Punkte*) Berechne die folgenden Grenzwerte

$$(i) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[5]{x}} \qquad\qquad (ii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \qquad\qquad (iii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1 + \frac{1}{2}x}{x^2}$$

7.(1-Fach-Bachelor)(*15 Punkte*) Jedes reelle Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit n ungerade, $a_n = 1$ und

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

hat mindestens eine Nullstelle.

7.(2-Fach-Bachelor)(*15 Punkte*) Zeige, dass die Gleichung

$$x^n = e^{x^2-1} - 2x$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mindestens eine reelle Lösung besitzt.