Klausur

Analysis 1

WS 2014/15

Mittwoch, 11.2.2015

Bei allen Aufgaben müssen vollständige Argumente angegeben werden.

Wenn eine bestimmte Beweismethode nicht vorgeschrieben ist, können alle Sätze und Ergebnisse der Vorlesung verwendet werden

Es gibt zwei verschiedene Versionen von Aufgabe 5, eine für 2-Fach Bachelor und die andere für 1-Fach Bachelor Studenten.

1. (*20 Punkte*)

(i) (15 Punkte) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

(ii) (5 Punkte) Benutzen Sie diese Gleichung, um zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

gilt.

2.(*20 Punkte, (i) 10 Punkte, (ii) 5 Punkte, (iii) 5 Punkte*)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Es sei $\alpha > 0$.

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad (ii) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Benutzen Sie die in der Vorlesung zur Verfügung gestellten Konvergenz Kriterien. Sie dürfen alle Ergebnisse über die geometrische Reihe benutzen.

.

3.(*20 Punkte*)
Entscheiden Sie, in welchen Punkten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

stetig ist. Verwenden Sie nur die Definition der Stetigkeit.

4.(*20 Punkte*)
Wo ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

differenzierbar?

5.(*20 Punkte*) (2-Fach Bachelor)
Berechnen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \exp(-x^3 + 15x^2 - 27x).$$

5.(*20 Punkte*) (1-Fach Bachelor)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar und f besitze in x_0 ein lokales Extremum. Beweisen Sie, dass

$$f'(x_0) = 0 \ .$$

Hinweis: Betrachten Sie den Differenzenquotienten.

.

1. (*20 Punkte*)
(i) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

(ii) Benutzen Sie diese Gleichung, um zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

gilt.

Beweis. Wir benutzen Induktion. Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Nun machen wir den Induktionsschritt von n auf $n+1$. Es gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(a+y)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

weil

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!((n-k+1)+k)}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Somit

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.$$

Aus der binomischen Formel mit $x = 1$ und $y = \frac{1}{n}$ folgt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \geq \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} n^{-k} = 1 + 1 = 2$$

□

2. Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Es sei $\alpha > 0$.

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad (ii) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Benutzen Sie die in der Vorlesung zur Verfügung gestellten Konvergenz Kriterien. Sie dürfen benutzen, dass die geometrische Reihe konvergiert.

Beweis. (i) Wir verwenden das Verdichtungskriterium von Cauchy.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^k)^{1-\alpha}$$

(ii) Wir verwenden das Verdichtungskriterium von Cauchy.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\ln 2^k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 (\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

(iii) Wir verwenden das Quotientenkriterium. Es gilt für alle $n = 2, 3, ..$

$$\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \leq \frac{3}{4}$$

□

3.(*20 Punkte*)
Entscheiden Sie, in welchen Punkten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

stetig ist. Verwenden Sie nur die Definition der Stetigkeit.

4.(*20 Punkte*)
Wo ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

differenzierbar?

5.(*20 Punkte*) (2-Fach Bachelor)
Berechnen Sie alle lokalen Minima und Maxima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \exp(-x^3 + 15x^2 - 27x).$$

Beweis. f ist die Komposition der Exponentialfunktion und eines Polynoms, also unendlich oft differenzierbar.

f hat zwei kritische Punkte: 1 und 9. Im Punkt 1 ist die zweite Ableitung strikt positiv. Deshalb liegt dort ein Minimum vor. In 9 ist die zweite Ableitung strikt negativ. Also liegt dort ein Maximum vor.

$$f'(x) = \exp(-x^3 + 15x^2 - 27x)(-3x^2 + 30x - 27)$$

Es gilt genau dann $f'(x) = 0$ wenn

$$-3x^2 + 30x - 27 = 0$$
$$x^2 - 10x + 9 = 0$$
$$(x-5)^2 = 16$$
$$x = 5 \pm 4$$

Weiter gilt

$$f''(x) = \exp(-x^3+15x^2-27x)(-3x^2+30x-27)^2+\exp(-x^3+15x^2-27x)(-6x+30)$$

$$f''(1) = \exp(-13) \cdot 0 + \exp(-13) \cdot 24 = \exp(-13) \cdot 24 > 0$$

$$\begin{aligned} f''(9) &= \exp(-9^3 + 15 \cdot 9^2 - 27 \cdot 9) \cdot 0 + \exp(-9^3 + 15 \cdot 9^2 - 27 \cdot 9)(-6 \cdot 9 + 30) \\ &= \exp(-9^3 + 15 \cdot 9^2 - 27 \cdot 9) \cdot (-24) \end{aligned}$$

□

5.(*20 Punkte*) (1-Fach Bachelor)
Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt

$$f'(x_0) = 0\ .$$

Beweis. f habe in x_0 ein lokales Maximum. Dann gilt

$$\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : \quad f(x_0 + \tfrac{1}{n}) \leq f(x_0) \ \text{ und } \ f(x_0 - \tfrac{1}{n}) \leq f(x_0).$$

Hieraus folgen

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0))}{\frac{1}{n}} \leq 0 \\ f'(x_0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0))}{-\frac{1}{n}} \geq 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Für ein lokales Minimum wird genauso argumentiert. □