Klausur
Analysis II

SS 2014 Montag, 21. Juli 2014

Bei allen Aufgaben müssen vollständige Argumente angegeben werden.

Es gibt zwei verschiedene Versionen von Aufgabe 5, eine für 1-Fach Bachelor und die andere für 2-Fach Bachelor Studenten.

1. (*20 Punkte*)

Benutzen Sie das Integralkriterium für Reihen, um zu entscheiden, für welche p mit $0 < p < \infty$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergiert.

2.(*20 Punkte, jede Teilaufgabe 10 Punkte*)

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit der Metrik

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \qquad\qquad d(x,y) = |x-y|$$

sind kompakt? Verwenden Sie nur die Definition der Kompaktheit beim Nachweis.
(i)

$$\left\{ \frac{1}{n^2} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

(ii)

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n^2} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

3. (*20 Punkte*)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

gegeben. Berechnen Sie alle lokalen Extrema und Sattelpunkte.

4.(*20 Punkte*)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Wo existieren die partiellen Ableitungen? Wo sind die partiellen Ableitungen stetig? Wo ist die Funktion (total) differenzierbar?

5.(*20 Punkte, jede Teilaufgabe 10 Punkte*) (2-Fach Bachelor)

(i) Berechnen Sie die Fläche, die von den beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x - x^2$ eingeschlossen wird.

(ii) Berechnen Sie die Länge des Graphens von $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

5.(*20 Punkte*) (1-Fach Bachelor)

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen, die auf einer dichten Menge übereinstimmen. Zeigen Sie, dass die Integrale gleich sind.