Klausur

Analysis 2

SS 2011

Bei allen Aufgaben müssen vollständige Argumente angegeben werden.

Es gibt zwei Versionen der Aufgabe 6, eine für 1-Fach-Bachelor, die andere für 2-Fach-Bachelor.

1.(*20 Punkte*)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = 2y^2x - yx^2 + 4xy$$

gegeben. Finde alle relativen Extrema und Sattelpunkte.

2.(*10 Punkte*)
Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y + xz \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(u,v) = \begin{pmatrix} \sin(uv) \\ e^u \\ e^v \end{pmatrix}$$

Berechne die Ableitung

$$\frac{d(g \circ f)}{d(x,y,z)}$$

im Punkt $(1,2,1)$.

3.(*10 Punkte*)
Beweise: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann integrierbar.

4.(*15 Punkte*)
Berechne die unbestimmten Integrale

$$(i) \quad \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \qquad (ii) \quad \int \sin^2 x dx \qquad (iii) \quad \int x^2\sqrt{x^3+9} dx$$

$$(iv) \quad \int \ln x dx \qquad (v) \quad \int \cos^3 x$$

5.(*15 Punkte*)
Ist die Teilmenge

$$\left\{ (x,y) \middle| \exists n \in \mathbb{N} : x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$$

vom $\mathbb{R}^2$ offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt bzgl. der Euklidischen Norm?

6.(1-Fach-Bachelor)(*15 Punkte*)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = y = 0 \\ xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige: f ist in $(0,0)$ differenzierbar, die gemischten, partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existieren für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und sind unstetig in $(0,0)$ und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

6.(2-Fach-Bachelor)(*15 Punkte*)

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = x^2 y - 2y$ gegeben. Berechne die Richtungsableitungen von f im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,0)$,$(0,1)$ und $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.