Funktionalanalysis

Carsten Schütt

July 18, 2009

Contents

Ich habe die Vorlesung *Funktionalanalysis* verschiedentlich gehalten. Das Skript geht aus diesen Vorlesungen hervor.

Im Sommer 2007 habe ich ein Seminar veranstaltet, in dem Themen behandelt wurden, die in Bezug zum Skript stehen. Die Studenten Niels Drögemüller, Matthias Gerstenkorn, Sven Krempe, Jan Christian Krüger, Lara Lehmhaus, Joscha Prochno, Knut Reimer, Stiene Riemer, Lars Rogalla, Johannes Strenger, Ming Wu haben an dem Seminar teilgenommen und dabei zur Verbesserung des Skriptes beigetragen.

Chapter 1

Voraussetzungen und Hilfmittel

1.1 Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel

Georg Cantor (1845-1918) hat Ende des 19. Jahrhunderts die Mengenlehre begründet. Er definiert eine Menge als eine Gesamtheit von wohlunterschiedenen Objekten des Denkens und der Wahrnehmung. Die Objekte werden als Elemente und die Gesamtheit als Menge bezeichnet. Falls x ein Element einer Menge M ist, so schreiben wir

$$x \in M$$

Cantor hat drei Axiome verwendet, ohne diese explizit aufzuführen:

(i) Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen.

(ii) Für jede Eigenschaft gibt es eine Menge, deren Elemente genau diese Eigenschaft erfüllen.

Unter einer Eigenschaft verstehen wir eine Aussage der mathematischen Logik, die die Elemente betrifft. Wir schreiben auch für die Menge

$$\{x|\phi(x)\}$$

falls ϕ die fragliche Eigenschaft ist.

(iii) Auswahlaxiom (dies wird später definiert.)

Die Vereinigung von zwei Mengen A und B ist

$$A \cup B = \{x|\ x \in A \vee x \in B\}$$

und von einer Menge von Mengen $\mathcal{A}$

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x|\exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

Der Durchschnitt von zwei Mengen A und B ist

$$A \cap B = \{x|\ x \in A \wedge x \in B\}$$

und einer Familie von Mengen $\mathcal{A}$

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x|\forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

Das Komplement einer Teilmenge A einer Menge M ist

$$A^c = \{x \in M|\ \neg(x \in A)\} = \{x \in M|\ x \notin A\}$$

Bertrand Russell (1872-1970, mit vollem Namen:Bertrand Arthur William Russell, 3rd Earl Russell of Kingston Russell, Viscount Amberley of Amberley and of Ardsalla) wies mit einem einfachen Beispiel nach, dass das Axiom (ii) zu Widersprüchen führt. Er fand das folgende nach ihm benannte Paradoxon. Als Eigenschaft einer Menge M betrachten wir

M ist nicht Element von sich selbst

Gemäß (ii) müsste es also eine Menge A geben, deren Elemente aus denjenigen Mengen M bestehen, die nicht Element von sich selbst sind. Dies führt sofort zu einem Widerspruch: Ist A Element von sich selbst?

Falls A nicht Element von sich selbst ist, dann muss A gemäß der Eigenschaft Element von sich selbst sein. Umgekehrt, falls A Element von sich selbst ist, dann muss A die Eigenschaft erfüllen, dass A nicht Element von sich selbst ist. Man kommt in jedem Fall zu einem Widerspruch.

Eine vergleichbare Paradoxie ist der folgende Satz: Ich lüge immer. Wenn ich immer lüge, dann ist der Satz gelogen und ich sage manchmal die Wahrheit. Dies widerspricht dem Satz.

Das Axiomensystem von Cantor ist weiterentwickelt worden, um solche Widersprüche auszuschließen. Es gibt heute mehrere Systeme, die man als vernünftig erachtet. Wir wollen hier das System von Zermelo-Fraenkel benutzen.

Wie von Cantor eingeführt, haben wir zwei binäre Verknüpfungen $\in$ und $=$.

$$x \in M$$

bedeutet, dass x ein Element, M eine Menge und x Element von M ist. Falls M und K zwei Mengen sind, bedeutet

$$M = K$$

dieselbe Menge sind. Es gelten die folgenden Axiome:

(i) Falls zwei Mengen dieselben Elemente besitzen, dann sind sie gleich.

$$(\forall x:\ x \in M \Leftrightarrow x \in K) \Rightarrow M = K$$

(ii) Es gibt eine Menge, die keine Elemente enthält. Wir bezeichnen diese Menge als Nullmenge $\emptyset$.

(iii) Es gibt eine Menge M, so dass $\emptyset \in M$ und so dass für alle $x \in M$ auch $\{x\} \in M$ gilt.

Hierbei bezeichnet $\{x\}$ die Menge, die nur aus dem Element x besteht.

(iv) (Potenzmenge) Für jede Menge M existiert die Menge $\mathcal{P}(M)$, die aus allen Teilmengen von M besteht. Wir nennen $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M.

(v) Es sei M eine Menge, deren Elemente wiederum aus Mengen bestehen. Dann gibt es eine Menge $\bigcup M$, die aus allen Elementen der Elemente von M besteht. Wir nennen diese Menge die Vereinigungsmenge.

(vi) (Regularität) Falls M eine nichtleere Menge ist, dann gibt es ein $x \in M$, so dass

$$x \cap M = \emptyset$$

In Quantorenschreibweise

$$M \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x : x \in M \wedge (\forall y : y \in x \rightarrow y \notin M)$$

(vii) Falls ϕ eine Eigenschaft ist und M eine Menge, dann gibt es eine Menge, die aus genau den x, $x \in M$, besteht, die die Eigeschaft ϕ erfüllen.

$$\{x | x \in M \wedge \phi(x)\}$$

(viii) (Ersetzung)Es sei ϕ eine Eigenschaft, die von zwei Mengen M und K abhängt. Wir nehmen an, dass es für jedes $x \in M$ genau ein $y \in K$ gibt, so dass $\phi(x, y)$ gilt. Dann gibt es eine Menge

$$\{y | \exists x \in M : \phi(x, y)\}$$

(ix) (Auswahlaxiom) Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge paarweise disjunkter, nichtleerer Mengen. Dann gibt es eine Menge A mit folgender Eigenschaft: Jedes Element von A ist Element einer der Mengen M und für jedes $M \in \mathcal{M}$ gibt es genau ein $x \in M$ mit $x \in A$. Wir nennen A die Auswahlmenge.

Das Auswahlaxiom ist zum Lemma von Zorn (Lemma 2) und zum Satz von Tichonov äquivalent (Satz 10).

Einige Bemerkungen zum Axiom (vi). Die Bedingung $x \cap M$ ist nicht mit $\{x\} \cap M$ zu verwechseln. Offenbar haben wir $\{x\} \cap M = \{x\}$. Der Durchschnitt ist also nie leer.

Falls es ein Element $x \in M$ gibt, das selbst keine Menge ist, so folgt $x \cap M = \emptyset$.

Die Menge $M = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ liefert ein Beispiel dafür, dass es ein $x \in M$ geben kann, so dass $x \cap M \neq \emptyset$. Wir wählen $x = \{1, 2\}$. Wir erhalten dann

$$x \cap M = \{1, 2\} \cap \{1, 2\{1, 2\}\} = \{1, 2\}$$

Mit Hilfe von Axiom (vi) können wir das folgende Lemma beweisen.

Lemma 1 *Es sei M eine Menge. Dann gilt $M \notin M$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $M \in M$ gilt. Da $M \in \{M\}$ gilt, folgt, dass

$$M \in M \cap \{M\}$$

Das Axiom der Regularität besagt, dass es ein $x \in \{M\}$ gibt mit

$$x \cap \{M\} = \emptyset$$

Da $\{M\}$ nur ein Element enthält, nämlich M, folgt $x = M$. Somit gilt $M \cap \{M\} = \emptyset$, was der Aussage $M \in M \cap \{M\}$ widerspricht. $\square$

Die Frage, ob man das Auswahlaxiom zum Axiomensystem hinzufügen soll oder nicht, ist sehr kontrovers dikutiert worden. Die Annahme des Auswahlaxioms ist sehr hilfreich und eine große Anzahl von mathematischen Aussagen beruht darauf. Andererseits erzeugt man dadurch auch solche bizarren Resultate wie das Banach-Tarski Paradoxon.

Gödel zeigte 1938, dass das Auswahlaxiom mit dem Axiomensytem von Zermelo-Fraenkel konsistent ist. Er zeigte, dass man jedes Paradoxon, das man aus dem Auswahlaxiom erhält, so modifizieren kann, dass man es auch ohne das Auswahlaxiom erhält. Cohen zeigte 1963, dass die Verneinung des Auswahlaxiomes ebenso konsistent mit dem Axiomensystem von Zermelo-Fraenkel ist.

Um eine Auswahlmenge anzugeben, muss man durch eine Formel oder Vorschrift festlegen, welches Element man aus welcher Menge entnimmt. Dass man aus jeder einzelnen Menge jeweils ein Element auswählen kann, reicht dazu nicht aus.

In einigen Fällen braucht man das Auswahlaxiom nicht, um die Existenz einer Auswahlmenge sicherzustellen.

(a) Falls jedes $M \in \mathcal{M}$ nur ein einziges Element enthält.

(b) Falls $\mathcal{M}$ nur endlich viele M enthält.

(c) Falls jedes $M \in \mathcal{M}$ eine endliche Menge reeller Zahlen ist. Dann wählen wir als $x \in M$ das maximale Element.

Andererseits kann man zeigen, dass es eine Menge $\mathcal{M}$ gibt, so dass alle $M \in \mathcal{M}$ nur aus zwei Elementen bestehen, und so dass sich ohne das Auswahlaxiom nicht die Existenz einer Auswahlmenge herleiten liesse.

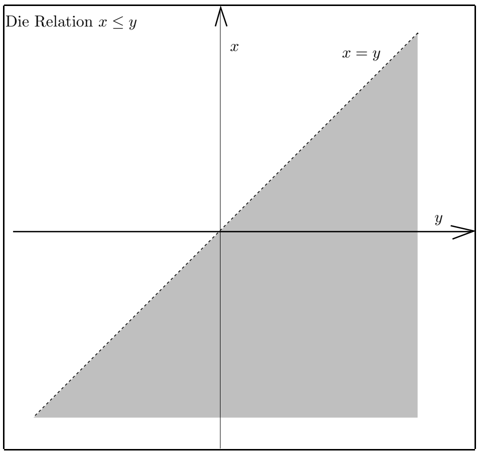
1.2 Relation und Ordnung

Es seien M und K Mengen . Dann heißt die Menge der geordneten Paare

$$M \times K = \{(x,y)|x \in M \wedge y \in K\}$$

das Cartesische Produkt von M und K.

Eine Relation R auf M ist eine Teilmenge von $M \times M$. Wir sagen, dass x in Relation zu y steht, wenn $(x,y) \in R$. Ein typisches Beispiel für eine Relation ist die Relation $\leq$ auf den reellen Zahlen.



Wir sagen, dass

(i) R reflexiv ist, falls für alle $x \in M$ gilt, dass xRx.

(ii) R symmetrisch ist, falls für alle $(x,y) \in M$ mit xRy auch yRx gilt.

(iii) R transitiv ist, falls für alle $x, y, z \in M$ mit xRy und yRz auch xRz gilt.

Eine Relation heißt Äquivalenzrelation, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Es sei M eine Menge mit der Äquivalenzrelation $\sim$. Die Mengen

$$\{x|x \sim y\}$$

heissen Äquivalenzklassen.

Eine Relation R heißt antisymmetrisch, falls für alle (x,y) mit $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$ folgt, dass $x = y$.

Eine Funktion von einer Menge M in eine Menge K ist eine Teilmenge f von $M \times K$, so dass für alle $x \in M$ genau ein $y \in K$ existiert mit $(x,y) \in f$. Dafür schreiben wir auch $f : M \to K$ und $f(x) = y$.

Wir sagen, dass eine Funktion surjektiv ist, falls für alle $y \in K$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$ existiert. Wir schreiben auch $f(M) = K$.

f ist injektiv, falls für alle $x, y \in M$ mit $f(x) = f(y)$ gilt, dass $x = y$.

f ist ein Isomorphismus, falls f injektiv und surjektiv ist.

Eine Relation R auf M ist eine Halbordnung, falls sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Eine Halbordnung R ist eine Ordnung, falls für alle $x, y \in M$ gilt, dass

$$(x,y) \in R \quad \text{oder} \quad x = y \quad \text{oder} \quad (y,x) \in R$$

Wir schreiben für eine Menge mit einer Halbordnung oder Ordnung auch $(M, \leq)$.

Als Beispiel für eine Menge mit einer Halbordnung, die keine Ordnung ist, lässt sich das folgende angeben. Wir betrachten die Menge aller Tupel reeller Zahlen $\{(s,t)|s,t \in \mathbb{R}\}$ mit der Halbordnung

$$(s,t) \leq (u,v) \quad \text{falls} \quad s \leq u \ \text{ und } \ t \leq v$$

Dies ist keine Ordnung, weil $(1,0)$ und $(0,1)$ nicht vergleichbar sind, d.h. das eine ist nicht kleiner als das andere und umgekehrt.

Eine Wohlordnung ist eine Ordnung mit der Eigenschaft, dass jede nichtleere Teilmenge K von M ein kleinstes Element besitzt, d.h. es gibt ein $x \in K$, so dass für alle $y \in K$ gilt, dass $x \leq y$. Dieses Element ist eindeutig.

Die übliche $\leq$ Relation auf den reellen Zahlen ist eine Ordnung aber keine Wohlordnung. Dies liegt daran, dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}|0 < x\}$$

kein minimales Element besitzt. K sei eine Teilmenge einer Menge mit einer Halbordnung. Wir sagen, dass $x \in K$ ein minimales (maximales) Element von K ist, falls $x \in K$ und für alle $y \in K$ gilt, dass $y \not< x$ $(x \not< y)$. Minimale und maximale Elemente sind nicht notwendig eindeutig. Außerdem folgt aus $x \not< y$ nicht notwendig $y \leq x$.

x ist eine untere (obere) Schranke von K, falls für alle $y \in K$ gilt, dass

$$x < y \ \text{ oder } \ x = y \qquad x > y \ \text{ oder } \ x = y$$

Falls M eine Teilmenge K enthält, die mit der Halbordnung von M eine geordnete Menge ist, dann nennen wir K eine Kette.

Lemma 2 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*
(i) (Auswahlaxiom) Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge paarweise disjunkter, nichtleerer Mengen. Dann gibt es eine Menge A mit folgender Eigenschaft: Jedes Element von A ist Element einer der Mengen $M \in \mathcal{M}$ und für jedes $M \in \mathcal{M}$ gibt es genau ein $x \in M$ mit $x \in A$.
(ii) (Hausdorffs Maximum Prinzip) Jede Menge mit einer Halbordnung enthält eine maximale Kette (d.h. eine Kette, die in keiner echten Teilmenge einer anderen Kette enthalten ist).
(iii) (Zorns Lemma) Jede nichtleere Menge mit einer Halbordnung, in der jede Kette eine obere Schranke hat, hat ein maximales Element.
(iv) Man kann jede Menge wohlordnen.

Das Auswahlaxiom ist auch zum Satz von Tichonov äquivalent: Jedes Produkt von kompakten Mengen ist in der Produkttopologie kompakt (Satz 10).

Die natürlichen Zahlen sind in ihrer natürlichen Ordnung wohlgeordnet, das gilt jedoch nicht für die reellen Zahlen. Lemma 2 versichert nur, dass es auf den reellen Zahlen eine Wohlordnung gibt, es liefert kein Konstruktionsverfahren für eine solche Wohlordnung. Eine solche Wohlordnung ist sehr schwer vorstellbar.

Beweis. $(ii) \Rightarrow (iii)$: Nach (ii) gibt es eine maximale Kette K in M. Nach Annahme von (iii) hat diese Kette eine obere Schranke s. Wir behaupten nun, dass s ein maximales Element von M ist. Falls dem nicht so wäre, so gibt es ein s' mit $s < s'$. Damit ist aber

$$K \cup \{s'\}$$

eine Kette, die K als echte Teilmenge enthält. Also ist K nicht maximal. Dies ist ein Widerspruch.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Wir betrachten die Vereinigungsmenge

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$$

Diese Menge enthält alle $M \in \mathcal{M}$ als Teilmengen. Nach (iv) können wir die Menge $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ wohlordnen. Da jede Teilmenge ein kleinstes Element hat, hat insbesondere auch jedes $M \in \mathcal{M}$ ein kleinstes Element x_M. Als Auswahlmenge nehmen wir nun

$$\{x_M | M \in \mathcal{M}\}$$

□

1.3 Maßtheorie

Das Oberflächenmaß σ_{n-1} auf ∂B_2^n bzw. S^{n-1} kann man sich auf verschiedene Weisen verschaffen. Man kann es als die Einschränkung des $n-1$-dimensionalen Hausdorff-Maßes definieren. Eine weitere Möglichkeit ist

$$\sigma_{n-1}(A) = n\lambda_n(\{tx|x \in A, 0 \leq t \leq 1\})$$

Lemma 3 *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum. Es sei $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $t \in [a,b]$ die Funktion $f_t : X \to \mathbb{R}$ mit $f_t(x) = f(x,t)$ integrierbar ist. Die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial t}$ existieren und es gibt eine integrierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in X$ und $t \in [a,b]$ die Ungleichung $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$ gilt. Dann ist die Funktion, die t auf die Zahl $\int_X f(x,t)d\mu(x)$ abbildet nach t differenzierbar und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_X f(x,t)d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x).$$

1.4 Messbarkeit vektorwertiger Funktionen

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X ein Banachraum. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt einfach, falls es eine endliche Folge $x_1, \ldots, x_n$ in X und messbare Mengen $A_i, i = 1, \ldots, n$ gibt, so dass

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \chi_{A_i}$$

f heißt $\mathbb{P}$-meßbar, falls es eine Folge von einfachen Funktionen f_n und eine Nullmenge N gibt, so dass für alle $\omega \in \Omega \setminus N$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$$

Eine Funktion $f : \Omega \to X$ heißt schwach $\mathbb{P}$-messbar, falls für alle $x^* \in X^*$ die Funktion

$$x^*(f)$$

$\mathbb{P}$-messbar ist. Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ Maßräume und $F : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ eine messbare Funktion. Dann nennt man das Maß μ_F, das durch

$$\mu_F(A) = \mu(F^{-1}(A)) \qquad\qquad A \in \mathcal{A}'$$

gegeben ist, das Bildmaß von F.

Wir sagen, dass zwei Funktionen F und G dieselbe Verteilung besitzen, wenn für alle messbaren Mengen A

$$\mu(F^{-1}(A)) = \mu(G^{-1}(A))$$

Satz 1 *(Pettis Messbarkeitstheorem) Es sei X ein Banachraum. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ ist genau dann $\mathbb{P}$-meßbar, wenn*

(i) f hat $\mathbb{P}$-wesentliches separables Bild, d.h. es gibt A mit $\mathbb{P}(A) = 0$ und $f(\Omega \setminus A)$ ist (Norm-)separabel in X.

(ii) f ist schwach $\mathbb{P}$-meßbar.

Eine $\mathbb{P}$-messbare Funktion $f : \Omega \to X$ heißt Bochner integrierbar, wenn es eine Folge von einfachen Funktionen $f_n : \Omega \to X$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mathbb{P} = 0.$$

Das Integral wird durch

$$\int_\Omega f d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mathbb{P}$$

definiert. (Man kann zeigen, dass das Integral wohldefiniert ist.)

Der Raum $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, X)$ ist der Raum aller $\mathbb{P}$-Bochner integrierbaren Funktionen $f : \Omega \to X$, so dass

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|_X^p d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{1.1}$$

Dieser Raum ist mit (1.1) als Norm ein Banachraum.

Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer Zufallsvariablen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist durch

$$F(x) = \mathbb{P}\{\omega | f(\omega) < x\}$$

definiert.

Die Fouriertransformierte $\hat{\mu}$ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mu \in M_0(\mathbb{R})$ ist

$$\hat{\mu}(t) := \int_\mathbb{R} e^{+its} \mu(ds)$$

Die charakteristische Funktion φ_f von $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist

$$\varphi_f(t) := \int e^{+its} \mu_f(ds) = \int e^{+itf(\omega)} d\mu(\omega)$$

wobei μ_f das Bildmaß bezeichnet.

Lemma 4 *(Bauer, p.94) Es sei* (Ω, μ) *ein Maßraum und* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine integrierbare Funktion. Dann gilt*

$$\int_\Omega f d\mu_T = \int_{\Omega'} f \circ T d\mu$$

Korollar 1 *Es sei* $(\Omega, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine integrierbare Funktion mit Verteilungsdichte* ϕ*. Dann gilt*

$$\int_\Omega g \circ f d\mathbb{P} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t) dt$$

1.5 Unabhängige Zufallsvariablen

Eine Familie von meßbaren Mengen A_i, $i \in I$ heißt unabhängig, falls für alle endlichen Teilmengen

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1,\ldots,n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

Eine Familie von Zufallsvariablen $x_i, i \in I$ heißt unabhängig, falls für alle endlichen Teilfamilien und für alle Borelmengen B_j aus E gilt

$$\mathbb{P}\left(x_{i_1} \in B_1, \ldots, x_{i_n} \in B\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(x_{i_j} \in B_j)$$

Falls von drei Zufallsvariablen f, g, h jeweils zwei immer unabhängig sind, so müssen die drei Variablen f, g, h keinesfalls unabhängig sein. Dazu betrachtet man drei Mengen A, B und C, die paarweise unabhängig sind, aber nicht insgesamt unabhängig, also

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

(Man kann hierfür als Maßraum das Intervall $[0, 1]$ mit dem Lebesguemaß wählen und als Mengen $A = [0, \frac{1}{2}]$, $B = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$, $C = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$.) Dann sind χ_A, χ_B und χ_C, paarweise, aber nicht insgesamt unabängig.

Lemma 5 *Eine Familie von Zufallsvariablen $x_i, i \in I$ ist genau dann unabhängig, falls die von $x_i, i \in I$ erzeugten σ-Algebren $\mathcal{A}(x_i)$ unabhängig sind, d.h. für alle $A_{i_j} \in \mathcal{A}(x_{i_j})$ $j = 1, \ldots, n$ gilt*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_{i_j})$$

(Bauer, S. 41-42).

Satz 2 *Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Maßraum und X und Y Banachräume. Es seien $x, y : \Omega \to X$ zwei unabhängige Zufallsveränderliche. Außerdem seien $g, f : X \to Y$ Borel-meßbare Funktionen. Dann sind auch $f(x), g(y)$ unabhängig.*

x heißt symmetrisch, falls x und $-x$ dieselbe Verteilung haben, d.h.

$$\forall B, \text{ Borel } : \mathbb{P}(x \in B) = \mathbb{P}(-x \in B)$$

Lemma 6 *Es sei X ein Banachraum, $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f_i : \Omega \to X$, $i = 1, \ldots, n$, symmetrische und unabhängige Zufallsveränderliche. Dann gilt für alle Borelmengen $A_1, \ldots, A_n$ und alle Vorzeichen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$*

$$\mathbb{P}(f_1 \in A_1, \ldots, f_n \in A_n) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 f_1 \in A_1, \ldots, \varepsilon_n f_n \in A_n) \qquad \varepsilon_i = \pm 1$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(f_1 \in A_1, \ldots, f_n \in A_n) \quad &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(f_i \in A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\varepsilon_i f_i \in A_1) \\
&= \mathbb{P}(\varepsilon_1 f_1 \in A_1, \ldots, \varepsilon_n f_n \in A_n)
\end{aligned}
$$

□

Lemma 7 *(Borel-Cantelli) Sei $A_n, n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Ereignissen und*

$$
A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j
$$

Dann gilt

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = 0
$$

Eine n-dimensionale Zufallsveränderliche ist eine Abbildung f von einem Wahrscheinlichkeitsraum in den $\mathbb{R}^n$, wobei jede Koordinatenfunktion von $f = (f_1, \ldots, f_n)$ eine Zufallsvariable ist.

Die Verteilungsfunktion F von f ist durch

$$
F(t) = \mathbb{P}(f_1 < t_1, \ldots, f_n < t_n)
$$

Die Zufallsvariablen $f_1, \ldots, f_n$ sind also genau dann unabhängig, wenn

$$
\mathbb{P}(f_1 < t_1, \ldots, f_n < t_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(f_i < t_i)
$$

Wir betrachten hier Zufallsveränderliche mit Werten im $\mathbb{R}^n$. Die Verteilungsfunktion einer mehrdimensionalen Zufallsveränderlichen $F = (f_1, \ldots, f_n)$ ist

$$
\begin{aligned}
&\nu_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \\
&\nu_F(x) = \mathbb{P}(f_1 \leq x_1, \ldots, f_n \leq x_n)
\end{aligned}
$$

Die charakteristische Funktion ist

$$
\begin{aligned}
ch_F : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{C} \\
ch_F(x) &= \int_{\Omega} \exp(i < x, F(\omega) >) d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i < x, \xi >) d\nu_F(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i < x, \xi >) d_F(\xi) d\xi
\end{aligned}
$$

wobei d_F die Dichtefunktion von F ist (sie existiert, falls die Verteilungsfunktion absolut stetig ist).

$$\nu_F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} d_F(\xi) d\xi$$

Satz 3 *Es sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable und ch_F ihre charakteristische Funktion. Dann gilt für $I = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$*

$$\mathbb{P}(F \in I) = \lim_{T\to\infty} (2\pi)^{-n} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{-it_k a_k} - e^{-it_k b_k}}{it_k} \mathrm{ch}_F(t) dt$$

vorausgesetzt, dass die Verteilungsfunktionen der Zufallsveränderlichen f_k an den Stellen a_k und b_k stetig sind.

Insbesondere ist damit eine Verteilungsfunktion eindeutig durch die charakteristische Funktion bestimmt.

Falls ch_F eine integrierbare Funktion ist, dann gilt

$$d_F(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i < x, \xi >) ch_F(x) dx$$

Die Verteilungsfunktion einer Summe $f_1 + \cdots + f_n$ ist

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n f_i < t\right) = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n s_i < t} \mathbb{P}(f_1 < s_1, \ldots, f_n < s_n) ds_1 \cdots ds_n$$

Falls die Summanden unabhängige Zufallsvariablen sind, gilt weiter

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n f_i < t\right) = \int \cdots \int_{\sum_{i=1}^n s_i < t} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(f_i < s_i) ds_1 \cdots ds_n$$

Falls wir eine Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen f_1 und f_2 haben, dann ergibt sich die Faltungsformel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(f_1 + f_2 < t) &= \iint_{s_1 + s_2 < t} \mathbb{P}(f_1 < s_1)\mathbb{P}(f_2 < s_2) ds_2 ds_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t - s_1} \mathbb{P}(f_1 < s_1)\mathbb{P}(f_2 < s_2) ds_2 ds_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \mathbb{P}(f_1 < s_1)\mathbb{P}(f_2 < s_2 - s_1) ds_2 ds_1 \\
&= \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(f_1 < s_1)\mathbb{P}(f_2 < s_2 - s_1) ds_1 ds_2
\end{aligned}$$

Das innere Integral ist die Faltung der Funktionen $\mathbb{P}(f_1 < s_1)$ und $\mathbb{P}(f_2 < s_2)$.

1.6 Gaußvariablen

Eine Zufallsvariable $x : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt normalverteilt mit Erwartungswert α und Streuung σ, falls die Verteilungsfunktion von x gleich

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{(s-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right) ds$$

ist. (Insbesondere gilt $\mathbb{E}x = \alpha$, $\mathbb{E}(x - \mathbb{E}x)^2 = \sigma^2$). Die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right)$$

bezeichnet man als Wahrscheinlichkeitsdichte.

Wir wollen außerdem die Funktion, die identisch 0 ist, als normalverteilt betrachten.

Lemma 8 *Es sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ eine normalverteilte Funktion mit*

$$\int_\Omega g d\mathbb{P} = m \qquad\qquad \int_\Omega (g-m)^2 = \sigma^2$$

Dann gilt für die charakteristische Funktion von g

$$ch_g(t) = \exp\left(imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

Lemma 9 *(i)*

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g_i| d\mathbb{P} &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |t| e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^\infty t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^\infty = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\int_\Omega |g_1|^r d\mathbb{P} = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^r e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_0^\infty t^r e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Wir substituieren $s = t^2/2$

$$\int_\Omega |g_1|^r d\mathbb{P} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} 2^{\frac{r-1}{2}} \int_0^\infty s^{\frac{r-1}{2}} e^{-s} ds = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} 2^{\frac{r-1}{2}} \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)$$

Lemma 10 *Für alle x mit $x > 0$*

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{(\pi-1)x + \sqrt{x^2+2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \le \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \le \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \tfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Lemma 11 *Für alle $t > 0$ gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)e^{-t^2/2} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty e^{-s^2/2}ds < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{t}\,e^{-t^2/2}$$

Beweis. Mittels Differentiation erhalten wir für alle $t > 0$

$$\frac{1}{t}\exp\left(-t^2/2\right) = \int_t^\infty \left(1+\frac{1}{s^2}\right) e^{s^2/2}ds \tag{1.2}$$

Tatsächlich

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\exp\left(-t^2/2\right)\right) = \left(-\frac{1}{t^2}-1\right) e^{-t^2/2}$$

Damit stimmen die beiden Seiten in (1.2) bis auf eine Konstante überein. Die Konstante muss aber 0 sein, wie man für $t \to \infty$ sieht.

Aus (1.2) folgt sofort für $t > 0$

$$\int_t^\infty \exp\left(-s^2/2\right) ds < \frac{1}{t}\exp\left(-t^2/2\right)$$

Hieraus folgt für $t > 0$

$$\int_t^\infty \frac{1}{s^2}\exp\left(-s^2/2\right) ds \leq \frac{1}{t^2}\int_t^\infty \exp\left(-s^2/2\right) ds < \frac{1}{t^3}\exp\left(-t^2/2\right)$$

Hiermit und mit $(*)$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\exp\left(-t^2/2\right) &= \int_t^\infty \left(1+\frac{1}{s^2}\right)\exp\left(-s^2/2\right) ds\\ &< \int_t^\infty \exp\left(-s^2/2\right) ds + \frac{1}{t^3}\exp\left(-t^2/2\right)\end{aligned}$$

□

Die Verteilung der Summe einer beliebigen Anzahl gleichverteilter unabhängiger Zufallsveränderlicher wurde zuerst von N.I. Lobatschewski [Lob] bestimmt. Er wollte dadurch den Fehler astronomischer Messungen abschätzen, um die Frage zu entscheiden, ob im Weltall die Gestze der euklidischen oder nicheuklidischen Geometrie gelten.

Satz 4 *Die Summe von unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen $g_1, \ldots, g_n$ ist wieder normalverteilt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte von $g_1 + \cdots + g_n$ ist*

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(t-(m_1+\cdots+m_n))^2}{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2}\right)$$

wobei

$$\int_\Omega g_i d\mathbb{P} = m_i \qquad \int_\Omega (g_i-m_i)^2 d\mathbb{P} = \sigma_i^2 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Eine Zufallsveränderliche $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt Gauß- oder normalverteilt, falls für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$< f, \xi >: \Omega \to \mathbb{R} \tag{1.3}$$

ist Gauß- oder normalverteilt.

Insbesondere muss jede Koordinatenfunktion von f normalverteilt sein. Dies allein reicht jedoch nicht aus, um sicherzustellen, dass f selbst normalverteilt ist. Es gibt zwei normalverteilte Funktionen g und h mit Werten in $\mathbb{R}$, so dass deren Summe $g + h$ nicht normalverteilt ist. Genau genommen ist dies der typische Fall.

In der Literatur wird häufig eine restriktivere Definition für eine mehrdimensionale Gaußfunktion verwendet. Es wird gefordert, dass die gemeinsame Verteilungsfunktion von f eine Dichte der Gestalt

$$d(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det(A^{-1}))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T A(x-m)\right)$$

hat, wobei A eine symmetrische, positiv definite Matrix ist. Diese Bedingung ist im Wesentlichen zur Definition (1.3) äquivalent, lässt jedoch im Gegensatz zu (1.3) nicht zu, dass die Matrix A nur positiv semidefinit ist.

Wir sagen, dass eine Menge $\{g_i | i \in I\}$ von reellwertigen Zufallsvariablen ein Gaußprozess ist, wenn sämtliche Linearkombinationen Gaußvariable sind.

Satz 5 *$F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)$, sei normalverteilt und zentriert und A sei die Matrix mit den Koordinaten*

$$a_{ij} = \int_\Omega f_i f_j \, d\mathbb{P}(\omega) \qquad i, j = 1, \dots, n$$

Dann gilt

(i) A ist positiv semidefinit.

(ii)

$$ch_F(x) = \int_\Omega \exp(i < x, F(\omega) >) d\mathbb{P}(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2} < Ax, x >\right)$$

(iii) Falls A positiv definit ist, so gilt

$$d_F(x) = (2\pi)^{-n} \det(A)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} < A^{-1}x, x >\right)$$

Es ergibt sich aus diesem Satz, dass UF und UFU^t dieselbe Verteilung besitzen, wenn U orthogonal ist und $F = (f_1, \dots, f_n)$ ein Vektor unabhängiger, gleichverteilter Gaußvariablen ist.

Beweis. (i) Wegen

$$0 \leq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i\right)^2 d\mathbb{P} = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \int_\Omega f_i f_j d\mathbb{P}$$

ist die Matrix positiv semidefinit. Es spielt hier keine Rolle, welche Funktionen f_i sind.

(ii)

$$\mathrm{ch}_F(x) = \int_\Omega \exp(i < x, F(\omega) >) d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} x_k f_k\right) d\mathbb{P}(\omega)$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{k=1}^{n} x_k f_k$ normalverteilt. Mit

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} x_k f_k d\mathbb{P} = 0 \qquad \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^{n} x_k f_k\right|^2 d\mathbb{P} = \sum_{k,\ell=1}^{n} x_k x_\ell \int_\Omega f_k f_\ell d\mathbb{P}$$

und Lemma 8 ergibt sich

$$\mathrm{ch}_F(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{n} x_k x_\ell \int_\Omega f_k f_\ell d\mathbb{P}\right)$$

(iii) wird mit Satz 3 bewiesen. □

Satz 6 *Es seien $g_1, \ldots, g_n$ normalverteilte, unabhängige Zufallsveränderliche. Dann gilt für die gemeinsame Verteilungsfunktion*

$$\mathbb{P}(g_1 < s_1, \ldots, g_n < s_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} \sigma_k^{-1} \int_{-\infty}^{s_k} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(t - m_k)^2}{\sigma_k^2}\right) dt$$

wobei

$$m_k = \int_\Omega g_k d\mathbb{P} \qquad \sigma_k = \int_\Omega |g_k - m_k|^2 d\mathbb{P}$$

Die n-dimensionale Verteilungsdichte von $(g_1, \ldots, g_n)$ ist

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} \sigma_k^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - m_k)^2}{\sigma_k^2}\right)$$

Satz 7 *Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Maßraum. Für jedes p mit $1 \leq p < \infty$ gibt es eine positive Konstante a_p, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und alle normalverteilten, unabhängigen Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ mit $\int g_i d\mathbb{P} = 0$ und $\int |g_i|^2 d\mathbb{P} = 1$*

$$a_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} x_i g_i\right|^p d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{p}}$$

gilt.

Beweis.

$$\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n x_i g_i \right|^p d\mathbb{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{t^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \right) dt$$

Wir substituieren

$$s = \frac{t}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und erhalten

$$\int \left| \sum_{i=1}^n x_i g_i \right|^p d\mathbb{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{p}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |s|^p \exp\left(-\frac{1}{2} s^2 \right) ds$$

□

1.7 Wahrscheinlichkeitstheorie

Satz 8 *(Zentraler Grenzwertsatz) Es seien f_i, $i \in \mathbb{N}$, unabhängige, gleichverteilte, reellwertige Zufallsveränderliche mit $\mathbb{E}f_1 = 0$ und $\mathbb{E}|f_1|^2 = 1$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} f_i \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Die charakteristische Funktion einer Zufallsveränderlichen $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist

$$ch_f(\xi) = \mathbb{E}e^{i<f,\xi>}$$

und die eines Maßes P auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$ch_P(t) = \int e^{i<x,t>}dP(x)$$

Für die charakteristische Funktion einer $N(0,1)$-Variablen g gilt $\mathrm{ch}_g(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)$.

Satz 9 *Es seien P und Q Maße auf dem $\mathbb{R}^n$ mit denselben charakteristischen Funktionen. Dann gilt $P = Q$.*

Chapter 2

Topologische Vektorräume

2.1 Topologische Räume

Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge X ist eine Teilmenge der Potenzmenge von X, die die drei folgenden Bedingungen erfüllt:
(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.
(ii) Für alle $A, B \in \mathcal{T}$ gilt $A \cap B \in \mathcal{T}$.
(iii) Für alle $S \subseteq \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{A \in S} A \in \mathcal{T}$.
Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offene Teilmengen von X.

Beispiel 1 *(i) Es sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf X.*
(ii) Es sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf X und sie heißt die diskrete Topologie.

Falls auf einer Menge X zwei Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ gegeben sind und $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ gilt, dann sagen wir, dass die Topologie $\mathcal{T}_1$ gröber als die Topologie $\mathcal{T}_2$ ist, bzw. die eine Topologie feiner als die andere ist.

Es sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$. Die durch $\mathcal{T}$ auf Y induzierte Topologie definieren wir so: Eine Menge V in Y ist offen, wenn es eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ mit $V = U \cap Y$ gibt.

Lemma 12 *Es sei X eine Menge und $\mathcal{S}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X. Dann gibt es eine Topologie $\mathcal{T}$, die $\mathcal{S}$ enthält und die gröber als alle Topologien ist, die $\mathcal{S}$ enthalten. Man nennt diese Topologie die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie.*

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$\mathfrak{S} = \{\mathcal{R} | \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \text{ und } \mathcal{R} \text{ ist eine Topologie}\}$$

Dann ist

$$\mathcal{T} = \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathfrak{S}} \mathcal{R}$$

eine Topologie. □

Lemma 13 *Es sei X eine Menge und $\mathcal{E}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X. Die von $\mathcal{E}$ erzeugte Topologie besteht aus $\emptyset$, X und beliebigen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{E}$.*

Beweis. Für jede Topologie, die $\mathcal{E}$ enthält gilt, dass sie $\emptyset$, X und beliebige Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{E}$ enthält.

Umgekehrt reicht es zu zeigen, dass das Mengensystem, das aus $\emptyset$, X und beliebigen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{E}$ besteht, eine Topologie ist.

$\emptyset$ und X gehören zum System. Es seien nun A und B zwei Mengen des Systems, also

$$A = \bigcup_{\iota \in I} \bigcap_{i=1}^{n_\iota} A_i^\iota \qquad\qquad B = \bigcup_{\eta \in J} \bigcap_{j=1}^{m_\eta} B_j^\eta$$

wobei $A_i^\iota, B_j^\eta \in \mathcal{E}$. Dann gilt

$$A \cap B = \left(\bigcup_{\iota \in I} \bigcap_{i=1}^{n_\iota} A_i^\iota \right) \cap \left(\bigcup_{\eta \in J} \bigcap_{j=1}^{m_\eta} B_j^\eta \right) = \bigcup_{\iota \in I, \eta \in J} \left(\bigcap_{i=1}^{n_\iota} A_i^\iota \cap \bigcap_{j=1}^{m_\eta} B_j^\eta \right)$$

$\square$

Eine Teilmenge U von X heißt Umgebung eines Punktes $x \in X$, falls es eine offene Menge $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ mit $x \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{O} \subseteq U$ gibt. Allgemeiner sagen wir, dass eine Menge U Umgebung einer Menge A ist, falls es eine offene Menge $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq \mathcal{O}$ und $\mathcal{O} \subseteq U$ gibt.

Lemma 14 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{O}$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung für alle ihre Elemente ist.*

Beweis. Falls $\mathcal{O}$ offen ist, ist sie Umgebung jedes ihrer Elemente.

Umgekehrt, falls eine Menge $\mathcal{O}$ Umgebung jedes ihrer Elemente ist, dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{O}$ eine offene Menge $\mathcal{O}_x$ mit $x \in \mathcal{O}_x$ und $\mathcal{O}_x \subseteq \mathcal{O}$. Damit folgt, dass

$$\bigcup_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{O}_x = \mathcal{O}$$

offen ist. $\square$

Eine Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert in einem topologischen Raum gegen x, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein N gibt, so dass für alle n mit $n \geq N$ die Relation $x_n \in U$ gilt.

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt Hausdorff, wenn es zu allen Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ zwei Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$ gibt.

So ist der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ mit $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ nicht Hausdorff, wenn die Menge X mehr als ein Element besitzt.

Eine Teilmenge $\mathcal{U}$ der Potenzmenge heißt Umgebungsbasis eines Punktes $x \in X$, falls für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt, dass U Umgebung von x ist und falls es zu jeder Umgebung V von x ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subseteq V$ gibt.

Eine Teilmenge von X heißt abgeschlossen, falls deren Komplement offen ist. Es folgt sofort, dass der Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen ist und dass eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen ist. Insbesondere können wir folgern, dass zu jeder Menge A eine kleinste abgeschlossene Menge $\overline{A}$ gibt, die A enthält. Diese Menge $\overline{A}$ heißt der Abschluss von A.

Ein Punkt $x \in X$ heißt Häufungspunkt einer Menge A, falls es in jeder Umgebung von x einen Punkt der Menge A gibt, der von x verschieden ist. Die Menge der Häufungspunkte von A bezeichnen wir mit $\mathrm{HP}(A)$.

Lemma 15 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge A von X ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle Häufungspunkte von sich enthält.*

Beweis. Wir nehmen an, dass A abgeschlossen ist. Dann ist A^c eine offene Menge. Deshalb ist A^c für jedes $x \in A^c$ eine Umgebung. Also gilt für alle $x \notin A$, dass x nicht Häufungspunkt von A ist.

Wir nehmen nun an, dass A alle seine Häufungspunkte enthält. Damit ist jeder Punkt x, der nicht in A enthalten ist, nicht Häufungspunkt von A. Also gibt es eine Umgebung U von x, die einen leeren Schnitt mit A hat. Somit ist auch A^c Umgebung von x. Also ist A^c für jeden Punkt x Umgebung, der in A^c enthalten ist. Also ist A^c offen. □

Lemma 16 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X. Die Vereinigung von A mit der Menge aller Häufungspunkte von A ist abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen, dass $(A \cup HP(A))^c$ offen ist. Es sei x weder ein Element von A noch ein Häufungspunkt von A, also $x \in (A \cup HP(A))^c$. Dann gibt es eine offene Menge $\mathcal{O}_x$, die x enthält und die einen leeren Schnitt mit $A \cup HP(A)$ hat. Wir überlegen uns dies. Da x kein Häufungspunkt von A ist, gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{O}_x$ von x, deren Schnitt mit A kein Element von A enthält, das verschieden von x ist. Da x auch kein Element von A ist, ist der Schnitt von $\mathcal{O}_x$ mit A leer. Es kann auch nicht sein, dass $\mathcal{O}_x$ ein Element von $\mathrm{HP}(A)$ enthält, sonst müsste $\mathcal{O}_x$ ein Element von A enthalten, weil $\mathcal{O}_x$ Umgebung eines Häufungspunktes von A wäre.

Also gilt
$$\mathcal{O}_x \cap (A \cup HP(A)) = \emptyset$$
Damit ist
$$\bigcup_{x \in (A \cup HP(A))^c} \mathcal{O}_x$$
eine offene Menge und es gilt
$$(A \cup HP(A))^c = \bigcup_{x \in (A \cup HP(A))^c} \mathcal{O}_x .$$

□

Ein Punkt x einer Menge A heißt innerer Punkt von A, falls A eine Umgebung von x ist. Das Innere $\overset{\circ}{A}$ einer Menge A ist die Menge aller inneren Punkte von A. Der Abschluss $\overline{A}$ einer Menge A ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält.

Der Rand einer Menge A ist $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Lemma 17 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A eine Teilmenge. Der Abschluss von A ist die Vereinigung von A mit der Menge ihrer Häufungspunkte.*

Beweis. Der Abschluss $\overline{A}$ enthält nach Lemma 15 alle Häufungspunkte von $\overline{A}$ und damit enthält der Abschluss auch alle Häufungspunkte von A.

Andererseits ist $A \cup HP(A)$ nach Lemma 16 eine abgeschlossene Menge. Es folgt $\overline{A} \subseteq A \cup HP(A)$. □

Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist in einem Punkt $x \in X$ stetig, wenn das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ eine Umgebung von x ist.

Zwei topologische Räume sind homöomorph, wenn es eine bijektive, stetige Abbildung zwischen ihnen gibt, deren Inverse ebenfalls stetig ist.

Lemma 18 *Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*
(i) f ist in allen Punkten von X stetig.
(ii) Das Urbild jeder offenen Menge ist offen.
(iii) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

Beweis. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus der Definition der abgeschlossenen Mengen.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Es sei V eine Umgebung von $f(x)$. Dann enthält V eine offene Umgebung $\mathcal{O}$ mit $f(x) \in \mathcal{O}$. Wegen (ii) ist $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen und es gilt $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Wegen $f^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq f^{-1}(V)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Es sei $\mathcal{O}$ eine offene Menge in Y. Wir zeigen, dass $f^{-1}(\mathcal{O})$ Umgebung für alle ihre Elemente ist. Mit Lemma 14 folgt, dass $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen ist.

Falls $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$, dann $f(x) \in \mathcal{O}$. Da $\mathcal{O}$ offen ist, ist diese Menge Umgebung von $f(x)$. Wegen (i) ist $f^{-1}(\mathcal{O})$ Umgebung von x. □

Lemma 19 *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ zwei topologische Räume. Die Topologie $\mathcal{S}$ werde von $\mathcal{E}$ erzeugt. $f : X \to Y$ ist genau stetig, wenn für alle $V \in \mathcal{E}$ gilt, dass $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.*

Beweis. Nach Lemma 13 gilt für eine Menge $V \in \mathcal{S}$

$$V = \bigcup_{\iota \in I} \bigcap_{i=1}^{n(\iota)} E_i^\iota \qquad\qquad E_i^\iota \in \mathcal{E}$$

Es folgt

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{\iota\in I}\bigcap_{i=1}^{n(\iota)} E_i^\iota\right) = \bigcup_{\iota\in I}\bigcap_{i=1}^{n(\iota)} f^{-1}\left(E_i^\iota\right)$$

□

Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes $(X,\mathcal{T})$ heißt kompakt, falls es zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gibt: Für alle $\mathcal{O}_\iota \in \mathcal{T}$, $\iota \in I$, mit $K \subseteq \bigcup_{\iota\in I}\mathcal{O}_\iota$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $\iota_1,\ldots,\iota_n$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n \mathcal{O}_{\iota_j}$.

Lemma 20 *Das stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt.*

Beweis. Es seien $(X,\mathcal{T}_X)$ und $(Y,\mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung und K eine kompakte Teilmenge von X. Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von $f(K)$. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{O}_\iota)$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von K.

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\iota\in I}\mathcal{O}_\iota\right) = \bigcup_{\iota\in I} f^{-1}(\mathcal{O}_\iota)$$

Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $f^{-1}(\mathcal{O}_{\iota_1}),\ldots,f^{-1}(\mathcal{O}_{\iota_n})$ von K

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{O}_{\iota_i})$$

Hieraus folgt

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{O}_{\iota_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_{\iota_i}$$

□

Lemma 21 *Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. X ist genau dann kompakt, wenn jede Familie $\mathcal{F}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft*

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{F}: \bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$$

gilt, dass

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A \neq \emptyset.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst: Aus der Kompaktheit von X folgt, dass aus der endlichen Durchschnittseigenschaft folgt, dass der Gesamtschnitt nicht leer ist.

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie abgeschlossener Mengen mit der endlichen Durchschnittseigenschaft, aber

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \emptyset.$$

Wir zeigen, dass X dann nicht kompakt ist.

Die Bedingung $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A=\emptyset$ bedeutet, dass A^c, $A\in\mathcal{F}$, eine offene Überdeckung von X ist, also

$$X=\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A^c$$

Falls X kompakt wäre, dann gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Dies kann aber nicht sein, weil die endliche Durchschnittseigenschaft gilt.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Wir nehmen an, dass aus der endlichen Durchschnittseigenschaft folgt, dass der Gesamtschnitt nicht leer ist. Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota\in I$ eine offene Überdeckung von X, also

$$\bigcap_{\iota\in I}\mathcal{O}_\iota^c=\emptyset$$

Also gibt es endlich viele Indices $\iota_1,\dots,\iota_n$ mit

$$\bigcap_{i=1}^n\mathcal{O}_{\iota_i}^c=\emptyset$$

□

Lemma 22 *$(X,\mathcal{T})$ sei ein kompakter, topologischer Raum. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.*

Beweis. Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge von X. Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von A, die die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt. Man beachte, dass die Mengen $B\in\mathcal{F}$ in dem topologischen Raum A abgeschlossen sind. Da A abgeschlossen ist, so sind alle Mengen $B\in\mathcal{F}$ abgeschlossene Teilmengen von X. Da X kompakt ist

$$\bigcap_{B\in\mathcal{F}} B\neq\emptyset$$

□

Lemma 23 *Es sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Hausdorff Raum, K eine kompakte Teilmenge und $x\in X$ mit $x\notin K$. Dann gibt es eine Umgebung von x und eine Umgebung von K, die disjunkt sind. Insbesondere ist eine kompakte Menge K abgeschlossen.*

Die Voraussetzung, dass der topologische Raum Hausdorff ist, ist notwendig. Dazu betrachte man den topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ mit $\mathcal{T}=\{\emptyset,X\}$. In diesem Raum sind $\emptyset$ und X die einzigen offenen Mengen, andererseits sind sämtliche Teilmengen von X kompakt. Damit ist eine echte Teilmenge von X, die nicht die leere Menge ist, kompakt, aber nicht abgeschlossen.

Beweis. Da X Hausdorff ist, gibt es zu x und jedem $y \in K$ eine offene Umgebung U_y von y und eine offene Umgebung V_y von x mit $U_y \cap V_y = \emptyset$ (x ist fest). Dann ist U_y, $y \in K$, eine offene Überdeckung von K. Weil K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung.

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$$

Die rechte Menge ist eine offen Umgebung von K.

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

ist eine offene Umgebung von x und

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) = \emptyset$$

Wir zeigen jetzt, dass K abgeschlossen ist. Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn sie ihre Häufungspunkte enthält. Offenbar sind alle Punkte, die nicht in K enthalten sind, nicht Häufungspunkte von K. $\square$

Es seien $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)$, $\iota \in I$, topologische Räume. Es sei $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ die Produktmenge der Mengen X_ι, $\iota \in I$. Dies sind alle Abbildungen

$$x : I \to \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$$

so dass für alle $\iota \in I$ die Relation $x(\iota) \in X_\iota$ gilt. Die Abbildung $p_\eta : \prod_{\iota \in I} X_\iota \to X_\eta$, die durch $p_\eta((x_\iota)_{\iota \in I}) = x_\eta$ definiert ist, heißt Projektion auf die Koordinate η. Die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ ist die von den Mengen

$$\{p_\eta^{-1}(\mathcal{O}_\eta) | \eta \in I \text{ und } \mathcal{O}_\eta \in \mathcal{T}_\eta\} \tag{2.1}$$

erzeugte Topologie. Auf dem Produktraum von zwei Räumen $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ wird die Produkttopologie von den Mengen

$$\{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 | \mathcal{O}_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ und } \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_2\}$$

erzeugt.

Lemma 24 *Es seien $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)$, $\iota \in I$, topologische Räume. Die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ ist die gröbste Topologie, für die alle Projektionen p_η stetig sind.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Projektionen stetig sind. Dazu weisen wir nach, dass das Urbild einer offenen Menge offen ist. Dies ist offensichtlich, weil die Produkttopologie die gröbste Topologie ist, so dass alle Mengen $p_\eta^{-1}(\mathcal{O})$ offen sind, falls $\mathcal{O}$ offen ist.

Unter allen Topologien, bzgl. denen die Projektionen stetig sind gibt es eine gröbste. Dies folgt aus Lemma 12. Aus der Stetigkeit der Projektionen folgt, dass für alle η und alle offenen Mengen $\mathcal{O}$ in X_η gilt, dass $p_\eta^{-1}(\mathcal{O})$ offen ist. Die gröbste Topologie, bzgl. der alle Projektionen stetig sind, umfasst also diese Mengen. Somit ist die gröbste Topologie, bzgl. der alle Projektionen stetig sind, feiner als die Produkttopologie. □

Lemma 25 *Es seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume. Es sei $\mathcal{T}$ die Familie aller Mengen, die beliebige Vereinigungen von Mengen*

$$\prod_{i\in I} U_i = \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i \,\middle|\, \forall i \in I : x(i) \in U_i \right\}$$

sind, die die folgende Eigenschaft erfüllen: Für alle $i \in I$ ist U_i eine offene Menge und bis auf endlich viele i gilt $U_i = X_i$. Dann ist $\mathcal{T}$ gleich der Produkttopologie.

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist. Die leere Menge ist Element von $\mathcal{T}$. Außerdem sind beliebige Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$.

Wir müssen noch zeigen, dass auch endliche Schnitte von Mengen in $\mathcal{T}$ wieder in $\mathcal{T}$ liegt.

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left(\bigcup_{j \in J} \prod_{i\in I} U_i^j \right) \cap \left(\bigcup_{k\in K} \prod_{i \in I} V_i^k \right) \\ &= \bigcup_{j\in J, k \in K} \left(\prod_{i\in I} U_i^j \right) \cap \left(\prod_{i \in I} V_i^k \right) = \bigcup_{j \in J, k\in K} \prod_{i\in I} (U_i^j \cap V_i^k) \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{T}$ eine Topologie. Wir prüfen nach, dass sie mit der Produkttopolgie übereinstimmt. Die Produkttopologie wird von Mengen

$$p_\eta^{-1}(\mathcal{O}_\eta) = \prod_{i\in I} U_i$$

mit $U_i = X_i$, falls $i \neq \eta$, und $U_\eta = \mathcal{O}_\eta$, erzeugt, wobei $\mathcal{O}_\eta$ eine offene Menge in X_η ist. □

Beispiel 2 *Es sei C die Cantor-Menge, die mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie ausgestattet ist. Der zweielementige Raum $\{0, 1\}$ sei mit der diskreten Topologie ausgestattet und $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0, 1\} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie. Dann sind C und $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ homöomorph.*

Insbesondere ist $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ kompakt.

Beweis. Die Cantor-Menge ist durch

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \,\middle|\, c_n \in \{0, 2\} \right\}$$

gegeben. Die Abbildung $f:\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$

$$f(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}$$

ist eine bijektive Abbildung, deren Inverse f^{-1} stetig ist. Da C kompakt ist, so folgt, dass f auch stetig ist und $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ kompakt.

Wir zeigen, dass f bijektiv ist. Die Surjektivität folgt unmittelbar aus der Definition der Cantor-Menge. Wir weisen nun die Injektivität nach. Es seien $a,b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit $f(a)=f(b)$. Es sei n_0 die größte, ganze Zahl, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n<n_0$ die Gleichung $a_n=b_n$ gilt. Also gilt $a_{n_0} \neq b_{n_0}$ und wir können annehmen, dass $a_{n_0}=1$ und $b_{n_0}=0$. Damit folgt

$$0=f(a)-f(b)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(a_n-b_n)}{3^n}=\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{2(a_n-b_n)}{3^n}$$

und weiter

$$0=\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{a_n-b_n}{3^n}=\frac{1}{3^{n_0}}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{a_n-b_n}{3^n}\geq\frac{1}{3^{n_0}}-\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3^{n_0}}-\frac{1}{2\cdot 3^{n_0}}>0$$

Dies ist ein Widerspruch und f ist damit injektiv.

Wir zeigen nun, dass f^{-1} stetig ist. Wir untersuchen die Stetigkeit in einem Punkt $f(a)$. Wir weisen nach, dass das Bild jeder Umgebung U von $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ unter f eine Umgebung von $f(a)$ ist.

Wegen Lemma 25 sind die offenen Mengen in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ Vereinigungen von Mengen der Form

$$U=\prod_{n\in\mathbb{N}}U_n$$

wobei $U_n=\{0,1\}$ bis auf endlich viele n gilt. Eine offene Umgebung U von a enthält a, also gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ die Relation $a_n\in U_n$. Deswegen können wir annehmen, dass eine Umgebung U von a von der Gestalt

$$\{a_1\}\times\cdots\times\{a_{n_0}\}\times\{0,1\}\times\cdots$$

ist. Das Bild dieser Menge unter f ist

$$\left\{\sum_{n=1}^{n_0}\frac{2a_n}{3^n}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}\,\middle|\, c_n\in\{0,2\}\right\}$$

Die offenen Mengen in C sind Durchschnitte von offenen Mengen in $\mathbb{R}$ mit C. Deshalb ist

$$C\cap\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}-\frac{1}{3^{n_0+2}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}+\frac{1}{3^{n_0+2}}\right)$$

eine offene Umgebung von $f(a)$ und

$$C\cap\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}-\frac{1}{3^{n_0+2}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}+\frac{1}{3^{n_0+2}}\right)\subseteq\left\{\sum_{n=1}^{n_0}\frac{2a_n}{3^n}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}\,\middle|\, c_n\in\{0,2\}\right\}$$

Um diese Inklusion nachzuweisen, reicht es zu zeigen, dass in der Menge auf der linken Seite nur solche Elemente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}$$

auftreten, die $c_n=2a_n$ für alle n mit $1\leq n\leq n_0$ erfüllen. Wir weisen dies nach. Es sei also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}\in C\cap\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}-\frac{1}{3^{n_0+2}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}+\frac{1}{3^{n_0+2}}\right)$$

Es folgt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n - 2a_n}{3^n} \right| < \frac{1}{3^{n_0+2}}$$

Es sei m_0 die kleinste Zah aller n mit $c_n \neq 2a_n$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\frac{1}{3^{n_0+2}} > \frac{|c_{m_0} - 2a_{m_0}|}{3^{m_0}} - \sum_{n=m_0+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^{m_0}}$$

Also gilt $n_0 + 2 < m_0$. $\Box$

Ein Satz von Alexandrov und Hausdorff besagt, dass jeder kompakte, metrische Raum stetiges Bild der Cantor-Menge ist [Ben]. Dieser Satz hat eine Reihe von überraschenden Anwendungen.

Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn es eine dichte, abzählbare Teilmenge gibt.

2.2 Metrische Räume

Es sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ heißt Metrik, falls

(i) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Wir bezeichnen das Paar (X, d) als metrischen Raum. Die von der Metrik erzeugte Topologie ist die gröbste Topologie, die die Mengen

$$\{x | d(x, y) < \epsilon\} \qquad y \in X \quad \epsilon > 0$$

enthält. Wir bezeichnen die Mengen

$$B(y, r) = \{x | d(x, y) < r\}$$

als (offene) Kugeln mit Mittelpunkt y und Radius r. Diese offenen Kugeln sind offene Mengen. Wir bezeichnen

$$\bar{B}(y, r) = \{x | d(x, y) \leq r\}$$

als die abgeschlossene Kugel. Die abgeschlossene Kugel ist eine abgeschlossene Menge. Man beachte, dass der Abschluss $\overline{B(y, r)} = \overline{\{x | d(x, y) < r\}}$ der offenen Kugel in der Menge $\{x | d(x, y) \leq r\}$ enthalten ist, aber i.a. nicht gleich ist.

Wir sagen, dass ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar ist, wenn es eine Metrik auf X gibt, die die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt.

Beispiel 3 *Es sei X eine Menge und*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

(X, d) ist ein metrischer Raum und die erzeugte Topologie ist die diskrete.

Beispiel 4 *Es sei $M = \{-1, 0\} \cup (-\infty, -2] \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$ und d sei die Metrik auf den reellen Zahlen, $d(x, y) = |x - y|$. Dann gilt*
(i) $\bar{B}(0, 1)$ ist nicht der Abschluss von $B(0, 1)$.
(ii) $\bar{B}(0, 1)$ ist offen, aber keine offene Kugel, d.h. für alle x und r gilt $\bar{B}(0, 1) \neq B(x, r)$.
(iii) $B(0, 1)$ ist abgeschlossen, aber keine abgeschlossene Kugel. d.h. d.h. für alle x und r gilt $B(0, 1) \neq \bar{B}(x, r)$.

Beweis. Es gilt $B(0, 1) = \{0\} \cup (\frac{1}{2}, 1)$, $\bar{B}(0, 1) = \{-1, 0\} \cup (\frac{1}{2}, 1)$ und $\overline{B(0, 1)} = B(0, 1)$ □

Lemma 26 *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*
(i) f ist in x_0 stetig.
(ii) Für alle Folgen x_i, $i \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{i \to \infty} x_i = x_0$ gilt $\lim_{i \to \infty} f(x_i) = f(x_0)$.
(iii) Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle x mit $d_X(x_0, x) < \delta$ die Ungleichung $d_Y(f(x_0), f(x)) < \epsilon$

Eine Folge x_i, $i \in \mathbb{N}$, in einem metrischen Raum heißt Cauchy Folge, falls für alle $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle n mit $n, m \geq N$ die Ungleichung $d(x_n, x_m) < \epsilon$ gilt. Ein metrischer Raum (X, d) heißt vollständig, wenn jede Cauchy Folge konvergiert.

Man beachte, dass die Vollständigkeit keine topologische Invariante ist.

Beispiel 5 *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ seien mit den zwei Metriken $d_1(s,t) = |s-t|$ und*

$$d_2(s,t) = \left| \frac{s}{1+|s|} - \frac{t}{1+|t|} \right|$$

ausgestattet. Die von d_1 und d_2 erzeugten Topologien sind identisch, $(\mathbb{R}, d_1)$ ist vollständig, aber $(\mathbb{R}, d_2)$ ist nicht vollständig, weil die Folge n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge ist, die nicht konvergiert.

Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes heißt total beschränkt, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Kugeln $B(x_1, \epsilon), \dots, B(x_n, \epsilon)$ mit demselben Radius ϵ gibt, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$$

gilt.

Ein topologischer Raum heißt abzählbar kompakt, falls jede abzählbare offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

In der Literatur findet man auch als Definition für abzählbar kompakt: Jede unendliche Teilmenge besitzt einen Häufungspunkt. Wir verwenden hier aber die erstere Definition.

Lemma 27 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:*
(i) $(X, \mathcal{T})$ ist abzählbar kompakt.
(ii) Es sei A_i, $i \in \mathbb{N}$, eine Folge von abgeschlossenen, nichtleeren Mengen mit $A_i \supseteq A_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Wir nehmen an, dass $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ und dass X abzählbar kompakt ist. Dann gilt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = X$$

Dann gibt es eine endliche Teilüberdeckung mit

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}^c = X$$

Also

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \emptyset$$

Dies ist ein Widerspruch.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Es sei O_i, $i \in \mathbb{N}$, eine offene Überdeckung von X und wir nehmen an, dass es keine endliche Teilüberdeckung gibt, also

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} O_i \neq \emptyset \qquad \text{bzw.} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} O_i^c \neq \emptyset$$

Nach (ii) gilt dann

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i^c \neq \emptyset \qquad \text{bzw.} \qquad X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \neq \emptyset$$

□

Lemma 28 *Es sei (M,d) ein metrischer Raum und K eine Teilmenge dieses metrischen Raumes. Dann sind äquivalent:*
(i) K ist kompakt.
(ii) Jede unendliche Teilmenge von K besitzt einen Häufungspunkt.
(iii) (Bolzano-Weierstrass) Jede Folge in K hat eine Teilfolge, die in K konvergiert.
(iv) K ist vollständig und total beschränkt.
(v) K ist abzählbar kompakt.

Für beliebige topologische Räume folgt nicht aus der Folgenkompaktheit die Kompaktheit. Umgekehrt folgt auch nicht aus der Kompaktheit die Folgenkompaktheit.

Lemma 29 *Es sei X ein kompakter, topologischer Raum. Dann ist X abzählbar kompakt.*

Beweis. Es sei A eine Teilmenge von X, die keine Häufungspunkte besitzt. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U_x, die höchstens ein Element aus A enthält (nämlich x selbst). Es folgt

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x$$

Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

Also ist A eine endliche Menge. □

Lemma 30 *X sei ein metrischer Raum und A eine abzählbar kompakte Teilmenge. Dann ist A folgenkompakt.*

Beweis. Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in A. Falls die Folge nur endlich viele Elemente enthält, dann gibt es eine konstante Teilfolge, die insbesondere konvergiert.

Falls die Folge unendlich viele verschiedene Punkte enthält, dann hat die Menge $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ einen Häufungspunkt und es gibt eine Teilfolge, die konvergiert. $\Box$

Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine Überdeckung einer Teilmenge A eines metrischen Raumes X. $\delta > 0$ heißt Lebesgue Zahl für diese Überdeckung, falls zu jeder Teilmenge B von A, deren Durchmesser kleiner als δ ist, ein $\mathcal{O}_\iota$ mit $B \subseteq \mathcal{O}_\iota$ existiert. Falls kein solches δ existiert, dann setzen wir die Lebesgue Zahl 0.

Lemma 31 *Jede offene Überdeckung einer folgenkompakten Teilmenge K eines metrischen Raumes X hat eine strikt positive Lebesgue Zahl.*

Beweis. Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von K. Wir nehmen an, dass $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, keine strikt positive Lebesgue Zahl besitzt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge B_n von K, deren Durchmesser kleiner als $\frac{1}{n}$ ist und die in keiner der Mengen $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, enthalten ist.

Wir wählen $b_n \in B_n$. Dann gibt es eine konvergente Teilfolge.

$$b_0 = \lim_{j \to \infty} b_{n_j}$$

Es gibt ein ι_0 mit $b_0 \in \mathcal{O}_{\iota_0}$. Es folgt, dass ein $\epsilon > 0$ mit $B(b_0, \epsilon) \subseteq \mathcal{O}_\iota$ existiert. Wir wählen nun j so groß, dass

$$d(b_0, b_{n_j}) < \frac{\epsilon}{4} \qquad\qquad \frac{1}{n_j} < \frac{\epsilon}{4}$$

Es folgt

$$B_{n_j} \subseteq B(b_0, \epsilon) \subseteq \mathcal{O}_{\iota_0}$$

Dies folgt aus der Dreiecksungleichung. Es sei $y \in B_{n_j}$. Dann gilt $d(y, b_{n_j}) < \frac{\epsilon}{4}$.

$$d(y, b_0) \leq d(y, b_{n_j}) + d(b_{n_j}, b_0) < \frac{\epsilon}{2}$$

$\Box$

Lemma 32 *Es sei X ein metrischer Raum und K eine folgenkompakte Teilmenge. Dann ist K total beschränkt.*

Beweis. Wir zeigen, dass K nicht folgenkompakt ist, wenn K nicht total beschränkt ist.

Wir wählen eine Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, in K, so dass für alle $i, j \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ gilt. Es gibt ein solches $\epsilon > 0$, weil K nicht total beschränkt ist. Eine solche Folge besitzt keine konvergente Teilfolge. $\Box$

Lemma 33 *Es sei X ein metrischer Raum und K eine folgenkompakte Teilmenge. Dann ist K kompakt.*

Beweis. Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von K. Da K folgenkompakt ist, besitzt die Überdeckung eine strikt positive Lebesgue Zahl δ. Außerdem ist K total beschränkt, weil K folgenkompakt ist.

Es gibt also Mengen B_i, $i = 1, \dots, n$, deren Durchmesser kleiner als δ sind, mit

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

Dann gibt es zu jedem i ein ι_i mit $B_i \subseteq \mathcal{O}_{\iota_i}$. Also

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\iota_i}$$

□

Beweis von Lemma 28. $(i) \Leftarrow (iv)$: Wir zeigen $\neg(i) \Rightarrow \neg(iv)$, also falls K nicht kompakt ist, dann ist K nicht vollständig oder nicht total beschränkt. Dies ist äquivalent zu: Falls K nicht kompakt ist, dann folgt aus der totalen Beschränktheit von K, dass K nicht vollständig ist.

Es sei $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von K, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir zeigen, dass es eine Folge $x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass
(i) Keine Kugel $B(x_n, \frac{1}{2^n})$, $n \in \mathbb{N}$, wird von endlich vielen Mengen $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, überdeckt.
(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $B(x_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(x_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}) \neq \emptyset$.
Wir zeigen dies durch Induktion. Da K total beschränkt ist, gibt es endlich viele Kugeln $B(x_k^1, \frac{1}{2})$, $k = 1, \dots, N_1$, mit $x_k^1 \in K$ und

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_1} B(x_k^1, \tfrac{1}{2}).$$

Es muss ein k_0 geben, so dass $B(x_{k_0}^1, \frac{1}{2})$ nicht von endlich vielen $\mathcal{O}_\iota$ überdeckt wird. Anderenfalls würde es eine endliche Teilüberdeckung $\mathcal{O}_{\iota_i}$, $i = 1, \dots, n$ von K geben. Wir setzen $x_1 = x_{k_0}^1$.

Wir machen nun den Induktionsschritt von n nach $n+1$. K ist total beschränkt, also gibt es endlich viele Kugeln $B(x_k^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$, $k = 1, \dots, N_1$, mit $x_k^{n+1} \in K$ und

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{N_{n+1}} B(x_k^{n+1}, \tfrac{1}{2^{n+1}}).$$

Es sei J die Menge aller k, so dass

$$B(x_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(x_k^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}) \neq \emptyset \tag{2.2}$$

Dann gilt

$$B(x_n, \frac{1}{2^n}) \cap K \subseteq \bigcup_{k \in J} B(x_k^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$$

Es muss ein $k_0 \in J$ geben, so dass $B(x_{k_0}^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$ nicht von endlich vielen $\mathcal{O}_\iota$ überdeckt werden kann. Anderenfalls könnten wir $B(x_n, \frac{1}{2^n})$ durch endlich viele $\mathcal{O}_\iota$ überdecken. Wir setzen $x_{n+1} = x_{k_0}^{n+1}$.

Wir zeigen nun, dass für alle k und ℓ mit $k \leq \ell$

$$d(x_k, x_\ell) \leq \frac{1}{2^{k-2}}$$

gilt. Wegen (2.2) gibt es ein $y \in B(x_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(x_k^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$ und deshalb

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, y) + d(y, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Hieraus folgt

$$d(x_k, x_\ell) \leq \sum_{i=k}^{\ell-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=k}^{\ell-1} \frac{1}{2^{i-1}} \leq \frac{1}{2^{k-2}}$$

Somit ist x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge. Falls diese Cauchy-Folge nicht in K konvergiert sind wir fertig, wir haben $\neg(iv)$ gezeigt. Nehmen wir also an, dass die Cauchy-Folge in K konvergiert. Es sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Weil $x \in K$, gibt es ein $\iota_0 \in I$ mit $x \in \mathcal{O}_{\iota_0}$. Da O_{ι_0} offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B(x, \delta) \subseteq \mathcal{O}_{\iota_0}$. Nun wählen wir n so groß, dass $d(x, x_n) < \frac{\delta}{4}$ und $\frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{4}$. Es folgt

$$B(x_n, \frac{1}{2^n}) \subseteq \mathcal{O}_{\iota_0}$$

weil für $y \in B(x_n, \frac{1}{2^n})$ die Ungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\delta}{4} + \frac{1}{2^n} < \delta$$

gilt. Dies kann nicht sein, weil $B(x_n, \frac{1}{2^n})$ nicht durch endlich viele $\mathcal{O}_\iota$ überdeckt werden kann.

Offensichtlich gilt $(i) \Rightarrow (v)$. Wir zeigen nun $(v) \Rightarrow (iii)$. Wir nehmen an, dass es eine Folge x_i, $i \in \mathbb{N}$, gibt, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Dann muss die Folge unendlich viele verschiedene Elemente besitzen. Außerdem ist die Folge in K eine abgeschlossene Menge. Wir setzen

$$A_n = \{x_i | i \geq n\}$$

Die Mengen A_n sind abgeschlossen und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Deshalb gibt es eindlich viele Mengen A_n, so dass der Schnitt bereits leer ist. Dies ist ein Widerspruch. □

Lemma 34 *Es sei (X, d) ein separabler, metrischer Raum und A eine Teilmenge von X. Dann ist A auch separabel.*

Im Falle topologischer Räume ist diese Aussage falsch (Beispiel **??**).

Beweis. □

2.3 Filter und Netze

Die Stetigkeit einer Funktion zwischen metrischen Räumen lässt sich mit Hilfe von konvergenten Folgen charakterisieren: Eine Funktion f ist genau dann in einem Punkt x stetig, wenn für alle Folgen x_n, $n \in \mathbb{N}$, die gegen x konvergieren, gilt, dass die Folgen $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegen $f(x)$ konvergieren. Die Kompaktheit eines metrischen Raumes lässt sich ebenso durch Folgen charakterisieren: Jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. Für allgemeine topologische Räume reichen Folgen nicht mehr aus. Wir müssen den Begriff der Folge verallgemeinern. Dies führt auf den Begriff des Netzes.

Eine Menge I mit einer Relation $\leq$ heißt gerichtete Menge, falls
(i) Für alle $\iota \in I$ gilt, dass $\iota \leq \iota$.
(ii) Für alle $\iota_1, \iota_2, \iota_3 \in I$ mit $\iota_1 \leq \iota_2$ und $\iota_2 \leq \iota_3$ gilt, dass $\iota_1 \leq \iota_3$.
(iii) Für alle $\iota_1, \iota_2 \in I$ gibt es ein ι_3 mit $\iota_1 \leq \iota_3$ und $\iota_2 \leq \iota_3$.

Ein Netz in einer Menge M ist eine Abbildung von einer gerichteten Menge in die Menge M (ebenso wie eine Folge eine Abbildung der natürlichen Zahlen in eine Menge M ist). Jede Folge ist ein Netz.

Ein Netz x_ι, $\iota \in I$, in einem topologischen Raum X konvergiert gegen ein Element x, falls für alle Umgebungen U von x ein ι_0 existiert, so dass für alle ι mit $\iota \geq \iota_0$ gilt, dass $x_\iota \in U$.

Es sei x_ι, $\iota \in I$, ein Netz. Weiter sei J eine gerichtete Menge und $\phi : J \to I$ eine Abbildung, so dass für alle $\iota \in I$ ein $j_0 \in J$ existiert, so dass für alle $j \geq j_0$ gilt $\iota \leq \phi(j)$. Dann nennt man das Netz

$$x_{\phi(j)}, j \in J$$

ein Teilnetz von x_ι, $\iota \in I$.

Man beachte, dass ein Teilnetz einer Folge nicht eine Teilfolge sein muss (Beispiel 8).

Für reellwertige Netze lassen sich auch Limesinferior und Limessuperior definieren.

Lemma 35 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X. Ein Element x gehört genau dann zum Abschluss von A, wenn es ein Netz in A gibt, das gegen x konvergiert.*

Beweis. Es sei x im Abschluss von A. Dann besitzt jede Umgebung U von x einen nichtleeren Schnitt mit A. Wir wählen aus jedem Schnitt $U \cap A$ ein Element x_U. Dann ist

$$x_U,\ U \text{ ist Umgebung von } x$$

ein Netz, das gegen x konvergiert, wenn wir sagen, dass U kleiner als V ist, wenn V in U enthalten ist. Wir zeigen, dass es sich um ein Netz handelt. Es gilt trivialerweise $U \leq U$. Falls $U_1 \leq U_2$ und $U_2 \leq U_3$, dann ist also U_2 in U_1 enthalten und U_2 ist in U_3 enthalten. Also ist auch U_3 in U_1 enthalten und $U_1 \leq U_3$. Für je zwei Umgebungen

U und V von x gilt, dass auch $U \cap V$ eine Umgebung von x ist und es gilt $U \leq U \cap V$ und $V \leq U \cap V$.

Wir zeigen nun, dass das Netz gegen x konvergiert. Für jede Umgebung U und alle Umgebungen V mit $V \geq U$ gilt $x_V \in U$.

Wir nehmen nun an, dass es ein Netz x_ι, $\iota \in I$, in A gibt, das gegen x konvergiert. Dann gibt es zu jeder Umgebung U von x ein ι_0, so dass für alle ι mit $\iota_0 \leq \iota$ die Relation $x_\iota \in U$ gilt. Insbesondere gilt $A \cap U \neq \emptyset$. $\Box$

Lemma 36 *Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{S})$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann in einem Punkt x stetig, wenn für alle Netze x_ι, $\iota \in I$, die gegen x konvergieren, gilt, dass das Netz $f(x_\iota)$, $\iota \in I$, gegen $f(x)$ konvergiert.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f in x stetig ist. Es sei x_ι, $\iota \in I$, ein Netz, das gegen x konvergiert und V eine Umgebung von $f(x)$. Da f in x stetig ist, ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x. Weil das Netz x_ι, $\iota \in I$, gegen x konvergiert, existiert ein ι_0, so dass für alle ι mit $\iota \geq \iota_0$ die Relation $x_\iota \in f^{-1}(V)$ gilt. Dann folgt für alle ι mit $\iota \geq \iota_0$

$$f(x_\iota) \in f(f^{-1}(V)) = V$$

und somit gilt $\lim_\iota f(x_\iota) = f(x)$.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Es sei V eine Umgebung von $f(x)$. Wir nehmen an, dass $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist. Wir definieren nun ein Netz, das gegen x konvergiert, aber das Bild dieses Netzes konvergiert nicht gegen $f(x)$. Es sei $\mathcal{U}$ die Familie aller Umgebungen von x. Dies ist eine gerichtete Menge mit der Relation $U_1 \leq U_2$, wenn $U_2 \subseteq U_1$.

Da $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von x ist, gilt

$$U \setminus f^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Wir wählen ein $x_U \in U \setminus f^{-1}(V)$. Nach Konstruktion konvergiert das Netz x_U, $U \in \mathcal{U}$, gegen x. Aber für alle U gilt

$$f(x_U) \notin V$$

$\Box$

Eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von X heißt Filter, falls

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) Für alle $A \subseteq X$ mit $B \subseteq A$ und $B \in \mathcal{F}$ gilt $A \in \mathcal{F}$.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ gilt

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$$

Die Familie aller Umgebungen eines Punktes ist ein Filter.

Wir sagen, dass ein Filter $\mathcal{F}_1$ feiner ist als ein Filter $\mathcal{F}_2$, falls $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. "feiner als" ist eine Halbordnung (reflexiv, antisymmetrisch und transitiv) auf der Menge aller Filter. Ein Element $\mathcal{F}$ ist maximal, wenn es kein Element gibt, das echt größer ist, d.h. für alle $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$ gilt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. (Es kann natürlich mehrere maximale Elemente geben.) Ein solches maximales Element nennen wir Ultrafilter. Nach dem Lemma von Zorn (Lemma 2) gibt es ein maximales Element.

Es sei X eine Menge und $x \in X$. Dann ist die Familie aller Mengen, in denen x als Element enthalten ist, ein Ultrafilter. Einen solchen Ultrafilter nennen wir trivial.

Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten. Um dies einzusehen, betrachten wir alle Filter, die einen gegebenen Filter enthalten. Mit dem Lemma von Zorn (Lemma 2) folgt, dass es unter diesen einen maximalen Filter gibt.

Lemma 37 *Es sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter in X. $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, falls für alle Teilmengen A und B mit $A \cup B \in \mathcal{F}$ gilt, dass $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$ gilt.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jeder Ultrafilter $\mathcal{F}$ die Eigenschaft besitzt: $\forall A, B \subseteq X, A \cup B \in \mathcal{F} : A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$. Wir zeigen die äquivalente Aussage: Falls diese Eigenschaft nicht gilt, dann ist $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter.

Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter und es gelte

$$A \notin \mathcal{F} \qquad B \notin \mathcal{F} \qquad A \cup B \in \mathcal{F}$$

Wir betrachten nun die Familie $\mathcal{G}$ aller Teilmengen C von X mit

$$A \cup C \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{G}$ ist ein Filter und $\mathcal{G}$ ist strikt feiner als $\mathcal{F}$. Wir prüfen nach, dass $\mathcal{G}$ ein Filter ist.

$\emptyset \notin \mathcal{G}$, weil $A \notin \mathcal{F}$.

Wir zeigen, dass $D \in \mathcal{G}$, falls $C \in \mathcal{G}$ und $C \subseteq D$. $C \in \mathcal{G}$ bedeutet, dass $A \cup C \in \mathcal{F}$. Weil $A \cup C \subseteq A \cup D$, so gilt auch $A \cup D \in \mathcal{F}$. Also gilt $D \in \mathcal{G}$.

Es seien nun $G_i \in \mathcal{G}$, $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$, dass $A \cup G_i \in \mathcal{F}$. Weil $\mathcal{F}$ ein Filter ist, folgt

$$\bigcap_{i=1}^{n} (A \cup G_i) \in \mathcal{F}.$$

Deshalb gilt

$$A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i \right) \in \mathcal{F}$$

und somit $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{G}$. Wir prüfen nach, dass $\mathcal{G}$ feiner als $\mathcal{F}$ ist. Falls $C \in \mathcal{F}$, dann ist auch $A \cup C \in \mathcal{F}$, weil $C \subseteq A \cup C$. Also folgt $C \in \mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ ist nicht gleich $\mathcal{F}$, weil $B \in \mathcal{G}$ aber $B \notin \mathcal{F}$. Deshalb ist $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter.

Nun zeigen wir die Umkehrung. Wir nehmen nun an, dass für alle Teilmengen A und B mit $A \cup B \in \mathcal{F}$ gilt, dass $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$ gilt. Es sei $\mathcal{G}$ ein Filter, der feiner als $\mathcal{F}$ ist, und $C \in \mathcal{G}$. Dann gilt $C^c \notin \mathcal{G}$, weil sonst $\emptyset = C \cap C^c \in \mathcal{G}$. Weil $\mathcal{G}$

feiner als $\mathcal{F}$ ist, folgt $C^c \notin \mathcal{F}$. Da aber $C \cup C^c = X \in \mathcal{F}$ gilt, folgt $C \in \mathcal{F}$. Also gilt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. $\Box$

Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Man sagt, dass $\mathcal{F}$ gegen $x \in X$ konvergiert, wenn der Filter feiner als der Filter der Umgebungen von x ist.

Falls $f : A \to B$ eine Abbildung ist und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf A, dann bezeichnen wir den von den Bildmengen erzeugten Ultrafilter mit $f(\mathcal{U})$. Falls X ein topologischer Raum ist, $x_\iota \in X$, $\iota \in I$, und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, dann existiert

$$\lim_{\mathcal{U}} x_\iota$$

falls der von $\{x_\iota | \iota \in U\}$, $U \in \mathcal{U}$, erzeugte Ultrafilter konvergiert.

Lemma 38 *Es sei X ein topologischer Hausdorff Raum. X ist genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter konvergiert.*

Ein Netz x_ι, $\iota \in I$, heißt universales Netz, wenn für alle Teilmengen A von X ein ι_0 existiert, so dass entweder für alle $\iota \geq \iota_0$

$$x_\iota \in A$$

oder für alle $\iota \geq \iota_0$

$$x_\iota \in X \setminus A$$

gilt.

Eine konstante Folge ist ein universales Netz. Die Folge $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist kein universales Netz in $\mathbb{R}$. Um dies nachzuweisen, wählen wir die Menge $A = \{\frac{1}{2n} | n \in \mathbb{N}\}$. Es gibt auch keine Teilfolge, die universales Netz ist.

Lemma 39 *Jedes Netz besitzt ein universales Teilnetz.*

Beweis. Es sei x_ι, $\iota \in I$, ein Netz in X. Wir betrachten die Mengen

$$A_\iota = \{x_j | \iota \leq j\} \qquad \iota \in I$$

und die Familie $\mathcal{F}$ aller Mengen F, so dass ein $\iota \in I$ mit $A_\iota \subseteq F$ existiert. $\mathcal{F}$ ist ein Filter. Wir weisen dies nach. Falls $F \in \mathcal{F}$, dann gibt es ein $\iota \in I$, so dass $A_\iota \subseteq F$. Deshalb gilt $F \neq \emptyset$.

Es seien $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq G$. Dann gibt es ein $\iota \in I$ mit $A_\iota \subseteq F$. Also gilt $A_\iota \subseteq G$ und $G \in \mathcal{F}$.

Es seien $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$. Dann gibt es $A_{\iota_1}, \dots, A_{\iota_n}$, so dass für alle $i = 1, \dots, n$ die Inklusion $A_{\iota_i} \subseteq F_i$ gilt. Deshalb gilt

$$\bigcap_{i=1}^n A_{\iota_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^n F_i.$$

Zu $\iota_1,\dots,\iota_n$ gibt es ein ι_0, so dass für alle $i=1,\dots,n$ die Relation $\iota_i \le \iota_0$ gilt. Hiermit folgt

$$A_{\iota_0} \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_{\iota_i} \subseteq \bigcap_{i=1}^n F_i$$

und somit $\bigcap_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$. Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist.

$\mathcal{F}$ ist in einem Ultrafilter $\mathcal{U}$ enthalten. Wir betrachten nun die gerichtete Menge

$$\mathcal{I} = \{(U,\iota) |\ U \in \mathcal{U},\ \iota \in I,\ x_\iota \in U\} \tag{2.3}$$

mit der Relation $(U_1,\iota_1) \le (U_2,\iota_2)$, falls $U_2 \subseteq U_1$ und $\iota_1 \le \iota_2$. (Man beachte, dass U und ι durch $x_\iota \in U$ verknüpft sind.) Wir weisen nach, dass es sich um eine gerichtete Menge handelt.

Es seien $(U_1,\iota_1),(U_2,\iota_2),(U_3,\iota_3) \in \mathcal{I}$ mit $(U_1,\iota_1) \le (U_2,\iota_2)$ und $(U_2,\iota_2) \le (U_3,\iota_3)$. Das bedeutet

$$U_1 \supseteq U_2 \qquad \iota_1 \le \iota_2 \qquad U_2 \supseteq U_3 \qquad \iota_2 \le \iota_3$$

Also folgt

$$U_1 \supseteq U_3 \qquad \iota_1 \le \iota_3$$

Es seien $(U_1,\iota_1),(U_2,\iota_2) \in \mathcal{I}$. Dann gilt $V = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$, weil $\mathcal{U}$ ein Filter ist. Weil I eine gerichtete Menge ist, gibt es ein ι_0 mit $\iota_0 \ge \iota_1$ und $\iota_0 \ge \iota_2$. Es gilt

$$A_{\iota_0} \cap V \ne \emptyset.$$

Falls $A_{\iota_0} \cap V = \emptyset$, dann würde $\emptyset \in \mathcal{U}$ gelten, weil $A_{\iota_0} \in \mathcal{U}$ und $V \in \mathcal{U}$. Die leere Menge ist aber in keinem Filter enthalten.

Also gibt es ein j mit $j \ge \iota_0$ und $x_j \in V$. Nach (2.3) gilt $(V,j) \in \mathcal{I}$ und

$$(U_1,\iota_1) \le (V,j) \qquad (U_2,\iota_2) \le (V,j)$$

Also ist $\mathcal{I}$ eine gerichtete Menge.

Wir definieren nun das universale Teilnetz. Es sei $\phi : \mathcal{I} \to I$ mit

$$\phi(U,\iota) = \iota.$$

Wir zeigen, dass $x_{\phi(U,\iota)}$, $(U,\iota) \in \mathcal{I}$, ein Teilnetz ist. Es sei $\iota_0 \in I$. Dann gilt für alle (U,ι) mit $(U,\iota) \ge (X,\iota_0)$, dass

$$\phi((U,\iota)) = \iota \ge \iota_0$$

Wir zeigen, dass das Teilnetz $x_{\phi(U,\iota)}$, $(U,\iota) \in \mathcal{I}$, universal ist. Es sei $M \subseteq X$. Dann gilt $M \in \mathcal{U}$ oder $M^c \in \mathcal{U}$, weil $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist. O.E.d.A können wir annehmen, dass der erste Fall vorliegt. Falls

$$M \cap \{x_{\phi(U,\iota)} | (U,\iota) \in \mathcal{I}\} = \emptyset$$

dann gilt

$$M^c \supseteq \{x_{\phi(U,\iota)} | (U,\iota) \in \mathcal{I}\}$$

und die Behauptung ist bewiesen. Falls

$$M \cap \{x_{\phi(U,\iota)} | (U,\iota) \in \mathcal{I}\} \neq \emptyset$$

dann gibt es ein (U_0, ι_0) mit $x_{\phi(U_0,\iota_0)} = x_{\iota_0} \in M$. Da $(U_0, \iota_0) \in \mathcal{I}$, gilt $x_{\iota_0} \in U_0$. Also gilt $x_{\iota_0} \in M \cap U_0$. Weil $M \in \mathcal{U}$ und $U_0 \in \mathcal{U}$, gilt $U_0 \cap M \in \mathcal{U}$. Damit haben wir nachgewiesen, dass

$$(M \cap U_0, \iota_0) \in \mathcal{I}.$$

Es gilt für alle $(V, \iota) \geq (U_0 \cap M, \iota_0)$, dass $V \subseteq U_0 \cap M$ und $\iota_0 \leq \iota$. Wegen $(V, \iota) \in \mathcal{I}$ gilt $x_\iota \in V$.

$$x_{\phi(V,\iota)} = x_\iota \in V \subseteq M$$

Also gilt für alle (V, ι) mit $(U_0 \cap M, \iota_0) \leq (V, \iota)$

$$x_{\phi(V,\iota)} \in M.$$

□

Lemma 40 *Es sei X ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*
(i) A ist kompakt.
(ii) A hat die endliche Durchschnittseigenschaft.
(iii) Jedes universale Netz in A konvergiert in A.
(iv) Jedes Netz in A hat ein Teilnetz, das in A konvergiert.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) hatten wir bereits gezeigt (Lemma 21).

Wir zeigen, dass aus (i) die Eigenschaft (iii) folgt. Wir nehmen dazu an, dass es ein universales Netz x_ι, $\iota \in I$, in A gibt, das nicht in A konvergiert. Dann gibt es für jedes $z \in A$ eine offene Umgebung $U(z)$, so dass für alle ι ein $j \geq \iota$ mit

$$x_j \notin U(z)$$

existiert. Da das Netz universal ist, muss es ein ι geben, so dass für alle j mit $j \geq \iota$ die Relation $x_j \in U(z)$ oder für alle j mit $j \geq \iota$ die Relation $x_j \in U(z)^c$ gilt. Also gibt es ein ι_z, so dass für alle $j \geq \iota_z$ gilt, dass $x_j \in U(z)^c$.

Da A kompakt ist, besitzt die offene Überdeckung

$$A \subseteq \bigcup_{z \in A} U(z)$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U(z_i)$$

Nach unserer obigen Überlegung gilt dann für alle j, die größer als alle $\iota_{z_1}, \dots, \iota_{z_n}$ sind, dass

$$x_j \in \bigcap_{i=1}^{n} U(z_i)^c$$

Die letztere Menge hat aber einen leeren Schnitt mit A. Dies kann nicht sein, da das Netz in A liegt.

Wir zeigen, dass (iv) aus (iii) folgt. Nach Lemma 39 besitzt jedes Netz ein universales Teilnetz. Nach (iii) konvergiert dieses Teilnetz.

Nun zeigen wir, dass (i) aus (iv) folgt, bzw. dass ¬(iv) aus ¬(i) folgt. Wenn A nicht kompakt ist, dann gibt es eine offene Überdeckung,

$$A = \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$$

die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Es bezeichne $\mathcal{F}$ die Familie aller endlichen Teilmengen von I. Wir setzen $F_1 \leq F_2$, falls $F_1 \subseteq F_2$. Zu jedem $F \in \mathcal{F}$ existiert ein

$$x_F \in A \setminus \bigcup_{\iota \in F} U_\iota$$

Das Netz x_F, $F \in \mathcal{F}$, besitzt kein konvergentes Teilnetz, das in A konvergiert. Falls es ein konvergentes Teilnetz $x_{\phi(j)}$, $j \in J$, gibt, das in A konvergiert, dann gibt es einen Grenzwert x in A.

Deshalb gibt es ein ι mit $x \in U_\iota$. Für diese offene Umgebung U_ι zeigen wir, dass zu jedem j_0 ein j mit $j \geq j_0$ gibt, so dass $x_{\phi(j)} \notin U_\iota$. Da $\phi(j)$, $j \in J$, ein Teilnetz ist, gibt es zu jedem $F \in \mathcal{F}$ ein j_1, so dass für alle $j \geq j_1$ die Relation $F \leq \phi(j)$ gilt. Es gilt

$$x_{\phi(j)} \notin U_\iota \qquad \text{falls } \{\iota\} \leq \phi(j) \text{ bzw. } \iota \in \phi(j)$$

Zu gegebenem j_0 betrachten wir $\phi(j_0) \cup \{\iota\}$. Es gibt ein j_1, so dass für alle j mit $j \geq j_1$ die Relation $\phi(j_0) \cup \{\iota\} \leq \phi(j)$ gilt. Da $j_0 \leq j_1$ nicht gelten muss, wählen wir j_2 mit $j_0 \leq j_2$ und $j_1 \leq j_2$. Dann gilt für alle j mit $j \geq j_2$ die Relation $\phi(j_0) \cup \{\iota\} \leq \phi(j)$. Also gilt für alle j mit $j \geq j_2$, dass $x_{\phi(j)} \notin U_\iota$. Also liegt keine Konvergenz vor. □

Satz 10 *(Tichonov) Es seien $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)$, $\iota \in I$, topologische Räume und $K_\iota \subseteq X_\iota$, $\iota \in I$, kompakte Mengen. Dann ist*

$$\prod_{\iota \in I} K_\iota \text{ eine kompakte Menge in } \prod_{\iota \in I} X_\iota$$

bzgl. der Produkttopologie (2.1).

Andrei Nikolaevich Tichonov (1906-)

Der Satz von Tichonov ist äquivalent zum Lemma von Zorn bzw. zum Auswahlaxiom. Wir wollen uns davon überzeugen.

Beim Beweis des Satzes von Tichonov verwenden wir das Auswahlaxiom. Somit folgt aus dem Auswahlaxiom der Satz von Tichonov. Nun zur Umkehrung. Es sei $X_\iota, \iota \in I$ eine Familie nichtleerer Mengen. Des Weiteren sei ∞ ein Element, das nicht in $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ enthalten ist. Wir setzen $Y_\iota = X_\iota \cup \{\infty\}$, $\iota \in I$. Wir statten Y_ι mit der Topologie $\{\emptyset, X_\iota, \{\infty\}\}$ aus. Da es nur drei verschiedene offene Mengen gibt, ist Y_ι kompakt. Nach dem Satz von Tichonov ist der Produktraum $\prod_{\iota \in I} Y_\iota$ kompakt.

π_η bezeichne die Koordinatenprojektion auf die Koordinate η. Da π_η stetig ist, so ist $\pi_\eta^{-1}(X_\eta)$ ein abgeschlossene Teilmenge von $\prod_{\iota\in I} Y_\iota$. Außerdem besitzt die Familie $\{\pi_\eta^{-1}(X_\eta)|\eta \in I\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, weil das Element ∞ in jeder der Mengen Y_ι enthalten ist. Deshalb ist

$$\bigcap_{\eta\in I} \pi_\eta^{-1}(X_\eta) = \prod_{\iota\in I} X_\iota$$

nach Lemma 21 nicht leer.

Beweis. Nach Lemma 35 ist eine Menge genau dann kompakt, wenn jedes universale Netz in ihr konvergiert. Es sei x_α, $\alpha \in J$, ein universales Netz in $\prod_{\iota\in I} K_\iota$. Für jedes $\iota \in I$ ist dann

$$\pi_\iota(x_\alpha) \qquad \alpha \in J$$

ein universales Netz in K_ι. Wir weisen dies nach. Es sei A eine Teilmenge in X_η. Wir setzen

$$B = \prod_{\iota\in I} Y_\iota$$

mit $Y_\eta = A$ und für alle ι mit $\iota \neq \eta$ gelte $Y_\iota = X_\iota$. Dann ist

$$B^c = \prod_{\iota\in I} Z_\iota$$

wobei $Z_\eta = A^c$ und für alle ι mit $\iota \neq \eta$ die Gleichung $Z_\iota = X_\iota$ gilt. Da x_α ein universales Netz ist, gibt es ein α_0, so dass für alle α mit $\alpha \geq \alpha_0$ die Relation $x_\alpha \in B$ gilt, oder so dass für alle α mit $\alpha \geq \alpha_0$ die Relation $x_\alpha \in B^c$ gilt. Es folgt, dass für alle α mit $\alpha \geq \alpha_0$ die Relation $x_\alpha(\eta) \in A$ gilt, oder dass für alle α mit $\alpha \geq \alpha_0$ die Relation $x_\alpha(\eta) \in A^c$ gilt. Da K_ι kompakt ist, konvergiert dieses Netz.

$$\lim_\alpha(\pi_\iota(x_\alpha)) = x(\iota)$$

$x = (x(\iota))_{\iota\in I}$ ist ein Element des Produktraumes und das Netz konvergiert gegen dieses Element. Wir prüfen dies nach. Es sei U eine Umgebung von x. Dann können wir annehmen, dass es $n \in \mathbb{N}$ und $\iota_1, \ldots, \iota_n$ gibt, so dass $U = \prod_{\iota\in I} U_\iota$ und für alle $\iota \notin \{\iota_1, \ldots, \iota_n\}$ gilt $U_\iota = X_\iota$ und U_{ι_i} ist eine offene Menge in X_{ι_i}, $i = 1, \ldots, n$. Zu jedem ι_i existiert ein α_i, so dass für alle $\alpha \geq \alpha_i$ gilt

$$x_\alpha(\iota_i) \in U_{\iota_i}.$$

Es gibt ein α_0, so dass für alle $i = 1, \ldots, n$ die Relation $\alpha_{\iota_i} \leq \alpha_0$ gilt. Deshalb gilt für alle $\alpha \geq \alpha_0$

$$x_\alpha \in U.$$

Also konvergiert das Netz. $\square$

Beispiel 6 *(i) Nach Beispiel 2 ist die Cantor-Menge C homöomorph zu $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.*
(ii) Die Menge $\prod_{n\in\mathbb{N}}[0, \frac{1}{n}]$ mit der Produkttopologie wird als Hilbertquader bezeichnet. Diese Menge ist auch auf natürliche Weise im Hilbertraum ℓ_2 enthalten. Ausgestattet mit der vom Hilbertraum induzierten Toplogie ist diese Menge homöomorph zu der Menge mit der Produkttopologie.

Beispiel 7 *Es sei I eine überabzählbare Menge und $T = [0,1]^I$ mit der Produkttopologie. Es sei*

$$S = \{t \in T | \{\iota | t(\iota) \neq 0\} \text{ ist abzählbar}\}$$

Die Menge S ist nicht kompakt, aber S ist folgenkompakt.

$T = [0,1]^I$ ist nicht metrisierbar, d.h. es gibt keine Metrik auf $T = [0,1]^I$, die diese Topologie erzeugt.

Beweis. Der Abschluss von S ist gleich T, aber S ist nicht gleich T. Also ist S keine abgeschlossene Menge. Da T ein Hausdorff Raum ist, ist eine kompakte Menge abgeschlossen (Lemma 23). Also ist S nicht kompakt.

Wir überprüfen, dass der Abschluss von S gleich T ist. Es sei $t \in T$ und U eine Umgebung von t. Wir können annehmen, dass $U = \prod_{\iota \in I} U_\iota$, wobei U_ι eine offene Umgebung von t_ι ist und $U_\iota = [0,1]$ bis auf endlich viele ι gilt. Es seien $\iota_1, \ldots, \iota_n$ genau die Indices, für die $U_\iota \neq [0,1]$ gilt. Wir wählen $s \in S$ mit $s(\iota_i) = t(\iota_i)$, $i = 1, \ldots, n$ und die übrigen Koordinaten beliebig. Dann gilt $s \in U$.

Wir zeigen nun, dass S folgenkompakt ist. Es sei t_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in S. Es sei

$$I_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\iota | t_n(\iota) \neq 0\}$$

Dies ist eine abzählbare Menge. Es gilt für alle $\iota \notin I_0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $t_n(\iota) = 0$. Mit einem Diagonalisierungsargument zeigt man nun, dass es eine Teilfolge gibt, die konvergiert. □

Beispiel 8 *(i) $\{0,1\}^{[0,1]}$ ist nicht folgenkompakt, aber kompakt.*
(ii) $[0,1]^{[0,1]}$ mit der Produkttopologie ist kompakt und insbesondere abzählbar kompakt, aber nicht folgenkompakt.
(iii) $T = [0,1]^{[0,1]}$ und $\{0,1\}^{[0,1]}$ sind nicht metrisierbar.

Es kann sein, dass eine Folge keine konvergente Teilfolge besitzt, aber ein konvergentes Teilnetz.

Beweis. (i) Nach dem Satz von Tichonov ist $\{0,1\}^{[0,1]}$ kompakt. Es sei

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) 2^{-n} \qquad\qquad a_n(x) \in \{0,1\}$$

die dyadische Entwicklung von x. Falls x keine eindeutige dyadische Entwicklung besitzt, dann wählen wir diejenige, deren Koeffizienten ab einem bestimmten Index 0 sind. Dann ist $a_n : [0,1] \to \{0,1\}$ ein Element aus $\{0,1\}^{[0,1]}$ und die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$, besitzt keine konvergente Teilfolge. (ii) Die Kompaktheit von $[0,1]^{[0,1]}$ folgt aus dem Satz von Tichonov.

Um einzusehen, dass $[0,1]^{[0,1]}$ nicht folgenkompakt ist, muss man nur beachten, dass $\{0,1\}^{[0,1]}$ ein Teilraum von $[0,1]^{[0,1]}$ ist. Die in (i) angegebene Folge hat auch in $[0,1]^{[0,1]}$ keine konvergente Teilfolge.

Wir wollen hier noch ein weiteres Argument angeben. Wir fassen die Elemente von $[0,1]^{[0,1]}$ als Funktionen von $[0,1]$ nach $[0,1]$ auf. Wir setzen für $k = 0, \ldots, 10^n - 1$ und $x \in [\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n})$

$$f_n(x) = 10^n x - k$$

und $f_n(1) = 0$. Die Funktion f_n wächst also auf dem Intervall $[\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n})$ linear von 0 nach 1.

Wenn also $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{10^j}$ die Dezimalbruchentwicklung von $x \in [0,1]$ ist, dann gilt

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{n+j}}{10^j}. \tag{2.4}$$

(Wir lassen keine Dezimalbruchentwicklungen zu, deren Koeffizienten bis auf endlich viele gleich 9 sind.) Wir weisen die Gleichung (2.4) nach. Die Folge f_n, $n \in \mathbb{N}$ hat keine konvergente Teilfolge. Wir prüfen dies nach. Falls $x \in [\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n})$, dann gibt es ein $y \in [0, \frac{1}{10^n})$ mit

$$x = \frac{k}{10^n} + y = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{10^j} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{y_j}{10^j}$$

wobei $\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{10^j}$ die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{k}{10^n}$ ist und $\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{y_j}{10^j}$ die von y. Wegen der Eindeutigkeit der Dezimalbruchentwicklung (Wir lassen keine Dezimalbruchentwicklungen zu, deren Koeffizienten bis auf endlich viele gleich 9 sind.) stellt die rechte Seite auch die Dezimalbruchentwicklung von x dar. Also

$$x = \frac{k}{10^n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x_j}{10^j}$$

und

$$f_n(x) = 10^n x - k = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x_j}{10^{j-n}}$$

Falls es eine konvergente Teilfolge f_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, gibt, dann konvergiert sie punktweise für alle $x \in [0,1]$. Nun wählen wir einen Punkt x, für dessen Dezimalbruchentwicklung

$$x_{n_k+1} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 3 & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt. Die Folge $f_{n_k}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, konvergiert nicht in $\mathbb{R}$. Wir überprüfen dies.

$$f_{n_k}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{n_k+j}}{10^j}$$

Falls k gerade ist, erhalten wir $f_{n_k}(x) = \frac{1}{10} + \cdots \leq \frac{2}{10}$ und falls k ungerade ist $f_{n_k}(x) = \frac{3}{10} + \cdots > \frac{3}{10}$.
□

2.4 Topologische Vektorräume

Es sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Wir sagen, dass $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum ist, falls Vektoraddition und Skalarmultiplikation stetige Abbildungen sind, d.h.

$$\begin{aligned} \phi &: X \times X \to X & \phi(x,y) &= x+y \\ \psi &: X \times \mathbb{R}(\mathbb{C}) \to X & \psi(x,t) &= tx \end{aligned}$$

sind stetig. Hierbei wird die Topologie auf $\mathbb{R}$ wie üblich von den Mengen

$$\{s||s-t|<\epsilon\} \qquad t \in \mathbb{R} \quad \epsilon > 0$$

erzeugt.

Wir sagen, dass ein Netz x_γ, $\gamma \in \Gamma$ in einem topologischen Vektorraum X ein Cauchy-Netz ist, wenn es zu jeder Nullumgebung U ein γ gibt, so dass für alle α, β mit $\alpha, \beta \geq \gamma$ die Relation $x_\alpha - x_\beta \in U$ gilt.

Wir sagen, dass ein topologischer Vektorraum vollständig ist, wenn jedes Cauchy-Netz konvergiert.

Beispiel 9 *(i) Der $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Topologie ist ein topologischer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.*
(ii) Der $\mathbb{R}^n$ mit der diskreten Topologie ist kein topologischer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.
(iii) Der $\mathbb{R}^n$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ ist ein topologischer Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

Beweis. (ii) Wir zeigen, dass die Skalarmultiplikation $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\psi(t,x) = tx$ nicht stetig ist. Die Menge $\{y\}$ die nur y, $y \neq 0$ als Element hat ist in der diskreten Topologie offen.

$$(1, y) \in \psi^{-1}(\{y\})$$

Aber es gibt kein $\epsilon > 0$ mit

$$(1-\epsilon, 1+\epsilon) \times \{y\} \subseteq \psi^{-1}(\{y\}) = \{(t, \tfrac{1}{t}y) | t \neq 0\}$$

□

Lemma 41 *Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum.*

(i) Dann ist für alle $x, y \in X$ und alle Umgebungen U von x die Menge $y + U$ eine Umgebung von $x + y$. Insbesondere gilt für alle $x \in X$, alle offenen Mengen $\mathcal{O}$, alle abgeschlossenen Mengen A und alle kompakten Mengen K in X, dass $x + \mathcal{O}$ offen, $x + A$ abgeschlossen und $x + K$ kompakt sind.

(ii) Dann ist für alle $t \neq 0$, alle $x \in X$ und alle Umgebungen U von x die Menge tU eine Umgebung von tx.

Insbesondere sind für alle $t \neq 0$, alle offenen Mengen $\mathcal{O}$, alle abgeschlossenen Mengen A und alle kompakten Mengen K die Mengen $t\mathcal{O}$ offen, tA abgeschlossen und tK kompakt.

Beweis. (i) Die Abbildung ϕ ist in dem Punkt $(x+y,-y)$ stetig. Also ist für alle Umgebungen $U(x)$ von x die Menge $\phi^{-1}(U(x))$ eine Umgebung von $(x+y,-y)$. Also gibt es Umgebungen $V(x+y)$ von $x+y$ und $W(-y)$ von $-y$, so dass $\phi^{-1}(U(x)) \supseteq V(x+y) \times W(-y)$ bzw.

$$\phi(V(x+y) \times W(-y)) \subseteq U(x).$$

Das bedeutet

$$-y + V(x+y) \subseteq V(x+y) + W(-y) \subseteq U(x)$$

und somit $V(x+y) \subseteq y + U(x)$. Deshalb ist $y + U(x)$ eine Umgebung von $x+y$.

Eine Menge $\mathcal{O}$ ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Elemente y ist. Deshalb ist für alle $y \in \mathcal{O}$ die Menge $x + \mathcal{O}$ Umgebung von $x+y$. Es folgt, dass $x + \mathcal{O}$ Umgebung aller ihrer Elemente ist. Damit ist $x + \mathcal{O}$ offen.

Die Abgeschlossenheit der Menge $x + A$ folgt durch Komplementbildung.

Es sei K kompakt und $\mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, eine offene Überdeckung von $x + K$

$$x + K \subseteq \bigcup_{\iota \in I} \mathcal{O}_\iota.$$

Es folgt

$$K \subseteq \bigcup_{\iota \in I} -x + \mathcal{O}_\iota.$$

Da K kompakt ist und die Mengen $-x + \mathcal{O}_\iota$, $\iota \in I$, offen sind, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} -x + \mathcal{O}_{\iota_j}.$$

Dies bedeutet aber

$$x + K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{O}_{\iota_j}.$$

und somit hat $x + K$ eine endliche Teilüberdeckung.

(ii) Wir nutzen hier die Stetigkeit der Skalarmultiplikation ψ aus. Es sei U eine Umgebung von x. ψ ist in dem Punkt $(\frac{1}{t}, tx)$ stetig. Also ist $\psi^{-1}(U)$ eine Umgebung von $(\frac{1}{t}, tx)$. Somit gibt es eine Umgebung V von tx und ein $\epsilon > 0$ mit

$$(\tfrac{1}{t} - \epsilon, \tfrac{1}{t} + \epsilon) \times V \subseteq \psi^{-1}(U)$$

und deshalb

$$U \supseteq \psi((\tfrac{1}{t} - \epsilon, \tfrac{1}{t} + \epsilon) \times V) \supseteq \tfrac{1}{t} V$$

Also $V \subseteq tU$. $\Box$

Eine Teilmenge A eines Vektorraumes heißt zentralsymmetrisch oder kreisförmig, wenn für alle $x \in A$ und alle t mit $|t| \leq 1$ folgt, dass $tx \in A$.

Lemma 42 *Es sei X ein topologischer Vektorraum und U eine Umgebung der 0. Dann gibt es eine zentralsymmetrische, offene Umgebung V der 0, so dass*

$$V + V \subseteq U$$

Beweis. Da die Multiplikation mit einem Skalar stetig ist, ist die Abbildung ψ in $(0,0)$ stetig. Für alle Umgebungen U von 0 ist also $\psi^{-1}(U)$ eine Umgebung von $(0,0)$ in $X \times \mathbb{R}$. Deshalb gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung V von 0, so dass $\psi^{-1}(U) \supseteq V \times (-\epsilon, \epsilon)$ bzw.

$$U \supseteq \psi(V \times (-\epsilon, \epsilon)) = \bigcup_{|t|<\epsilon} tV.$$

Die Menge

$$W = \bigcup_{|t|<\epsilon} tV$$

ist zentralsymmetrisch, weil alle tV zentralsymmetrisch sind. Die Mengen tV sind für $0 < |t| < \epsilon$ wegen Lemma 41 offen. Da 0 in allen tV enthalten ist, ist die Vereinigung offen. Also enthält jede Umgebung eine zentralsymmetrische, offene.

Da auch die Addition stetig ist, enthält jede Umgebung U von 0 eine Umgebung V, so dass $V + V \subseteq U$. $\Box$

Lemma 43 *Es sei X ein topologischer Vektorraum, A eine abgeschlossene und K eine kompakte Teilmenge von X mit $A \cap K = \emptyset$. Dann gibt es eine zentralsymmetrische offene Umgebung U von 0, so dass*

$$(A + U) \cap (K + U) = \emptyset$$

Beweis. Da A abgeschlossen ist, so ist A^c offen und deshalb eine offene Umgebung für alle $x \in K$. Da X ein topologischer Vektorraum ist, so ist $-x + A^c$ eine offenen Umgebung von 0. Wegen Lemma 42 gibt es eine zentralsymmetrische Umgebung V_x von 0, so dass

$$V_x + V_x + V_x \subseteq -x + A^c$$

bzw.

$$(x + V_x + V_x + V_x) \cap A = \emptyset.$$

Deshalb gilt für alle $y_1, y_2, y_3 \in V_x$, dass $x + y_1 + y_2 + y_3 \notin A$. Also gilt für alle $y_1, y_2, y_3 \in V_x$, dass $x + y_1 + y_2 \notin -y_3 + A$. Aus der Zentralsymmetrie von V_x folgt, dass für alle $y_1, y_2, y_3 \in V_x$ die Relation $x + y_1 + y_2 \notin y_3 + A$ gilt, bzw.

$$(x + V_x + V_x) \cap (A + V_x) = \emptyset.$$

Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n$, so dass

$$K \subseteq (x_1 + V_{x_1}) \cup \dots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Wir wählen nun

$$V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}.$$

Dann gilt

$$K + V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V_{x_i} + V_{x_i})$$

Für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap (A + V_{x_i}) = \emptyset$$

Deshalb gilt für alle $i = 1, \ldots, n$

$$(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}) \cap (A + V) = \emptyset$$

und somit

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \right) \cap (A + V) = \emptyset$$

Also

$$(K + V) \cap (A + V) = \emptyset$$

□

Lemma 44 *Es sei X ein topologischer Vektorraum und U eine Umgebung der 0. Dann gilt*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$$

Beweis. Wir können annehmen, dass U offen ist. Die Abbildung

$$\psi : X \times \mathbb{R} \to X \qquad \psi(x,t) = tx$$

ist stetig. Deshalb ist auch die Abbildung $\psi_x : \mathbb{R} \to X$ mit $\psi_x(t) = tx$ stetig. Dies gilt, weil die Stetigkeit von ψ in einem Punkt (x_0, t_0) bedeutet: Aus $\lim_\iota (x_\iota, t_\iota) = (x_0, t_0)$ folgt $\lim_\iota t_\iota x_\iota = t_0 x_0$. Da wir $x_\iota = x_0$ für alle ι wählen können, folgt die Stetigkeit von ψ_x sofort.

Deshalb ist $\psi_x^{-1}(U) = \{t |\ tx \in U\}$ offen. Da $0 \in \psi_x^{-1}(U)$, so muss ein Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ in $\psi_x^{-1}(U)$ enthalten sein. Also gilt

$$(-\epsilon, \epsilon) \subseteq \{t |\ tx \in U\}$$

Wir wählen nun $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$. Dann gilt $x \in nU$. □

Eine Teilmenge A eines Vektorraumes X heißt absorbant, wenn

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA = X.$$

Lemma 45 *Es sei X ein reeller oder komplexer Vektorraum und $\mathcal{S}$ sei eine nichtleere Familie von Teilmengen von X, die kreisförmig und absorbant sind und die folgenden Bedingungen erfüllen:*

(i) $\emptyset \notin \mathcal{S}$

(ii) Für alle $U, V \in \mathcal{S}$ gibt es ein $W \in \mathcal{S}$, so dass $W \subseteq U \cap V$.

(ii) Für alle $U \in \mathcal{S}$ existiert ein $V \in \mathcal{S}$, so dass $V + V \subseteq U$.

Dann gibt es genau eine Topologie auf X, bzgl. der X ein topologischer Vektorraum ist und bzgl. der $\mathcal{S}$ eine Nullumgebungsbasis ist.

Lemma 46 *Es seien X und Y topologische Vektorräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. T ist genau dann stetig, wenn T in 0 stetig ist.*

Beweis. Wir nehmen an, dass T in 0 stetig ist. Es sei $x \in X$ und V eine Umgebung von $T(x)$. Dann ist $-T(x) + V$ eine Umgebung von 0 in Y. Da T in 0 stetig ist, ist $T^{-1}(-T(x) + V)$ eine Umgebung der 0 in X. Es gilt

$$T^{-1}(-T(x) + V) = -x + T^{-1}(V)$$

weil $y \in T^{-1}(-T(x) + V)$ genau dann, wenn $T(y) \in -T(x) + V$. Dies gilt genau dann, wenn es ein $v \in V$ mit $T(y) = -T(x) + v$ gibt, bzw. $T(y + x) = v$. Also $y + x \in T^{-1}(V)$.

ist $-x + T^{-1}(V)$ eine Umgebung von 0 in X. Deshalb ist $T^{-1}(V)$ eine Umgebung von x in X und T ist in x stetig. $\square$

2.5 Metrische Vektorräume

Falls X ein linearer Raum ist und für alle $x, y, z \in X$ die Gleichung $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ gilt, dann sagen wir, dass die Metrik translationsinvariant ist.

Lemma 47 *Es sei (X, d) ein linearer Raum mit translationsinvarianter Metrik. Dann ist die Vektoraddition stetig.*

Ein Vektorraum mit translationsinvarianter Metrik ist i.a. kein topologischer Vektorraum wie das Beispiel der Metrik zeigt, die die diskrete Topologie erzeugt.

Beweis. Wir zeigen, dass die Addition im Punkt (x, y) stetig ist. Wir können annehmen, dass die Umgebung U des Punktes $x + y$ gleich einer Menge $\{z|d(x + y, z) < \epsilon\}$ ist. Die Menge

$$\{v|d(v, x) < \tfrac{\epsilon}{2}\} \times \{w|d(w, y) < \tfrac{\epsilon}{2}\}$$

ist eine Umgebung von (x, y) und es gilt

$$\begin{aligned}
&\phi(\{v|d(v, x) < \tfrac{\epsilon}{2}\} \times \{w|d(w, y) < \tfrac{\epsilon}{2}\}) \\
&\qquad \subseteq \{v + w|d(v, x) < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ und } d(w, y) < \tfrac{\epsilon}{2}\} \\
&\qquad = \{v + w|d(x - v, 0) < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ und } d(w - y, 0) < \tfrac{\epsilon}{2}\} \\
&\qquad \subseteq \{v + w|d(x - v, w - y) < \epsilon\} \\
&\qquad = \{v + w|d(x + y, v + w) < \epsilon\} = \{z|d(x + y, z) < \epsilon\}
\end{aligned}$$

□

Es sei X ein topologischer Vektorraum. Wir sagen, dass eine Abbildung $\| \; \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Δ-Norm ist, wenn
(i) $\forall x \neq 0 : \|x\| > 0$
(ii) $\forall t, |t| \leq 1, \forall x \in X : \|tx\| \leq \|x\|$
(iii) $\forall x \in X : \lim_{t \to 0} \|tx\| = 0$
(iv) $\exists C \forall x, y \in X : \|x + y\| \leq C \max\{\|x\|, \|y\|\}$

Wir sagen, dass eine Δ-Norm eine F-Norm ist, wenn

$$\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Wir können durch eine F-Norm eine translationsinvariante Metrik definieren.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Wir zeigen zunächst, dass man zu jeder Δ-Norm eine F-Norm findet.

Lemma 48 *Es sei $\| \ \|$ eine Δ-Norm auf X und p, so dass für alle $x, y \in X$ die Ungleichung $\|x+y\| \leq 2^{\frac{1}{p}}(\|x\|+\|y\|)$ gilt. Dann gilt für alle $x_1, \dots, x_n \in X$*

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq 4^{\frac{1}{p}}(\|x_1\|^p + \cdots + \|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Beweis. Durch Induktion folgt

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} 2^{\frac{k}{p}} \|x_k\|$$

Wir definieren $H : X \to \mathbb{R}$ durch

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 2^{\frac{n}{p}} & \text{falls } 2^{\frac{n-1}{p}} < \|x\| \leq 2^{\frac{n}{p}} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|x\| \leq H(x) \leq 2^{\frac{1}{p}} H(x)$$

Wir zeigen durch Induktion, dass

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq 2^{\frac{1}{p}}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_n)^p)^{\frac{1}{p}}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Die Aussage für $n = 1$ ist klar. Wir nehmen nun an, dass die Aussage für n richtig ist und schliessen auf $n+1$. Wir können annehmen, dass $\|x_1\| \geq \|x_2\| \geq \cdots \geq \|x_{n+1}\|$. Wir nehmen zunächst an, dass die Werte $H(x_i)$, $1 \leq i \leq m+1$, verschieden sind. Weiter gilt $H(x_i) \leq 2^{1-\frac{i}{p}} H(x_1)$ und

$$C^i \|x_i\| \leq C^i H(x_i) \leq 2^{\frac{1}{p}} H(x_1) \leq 2^{\frac{1}{p}}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_n)^p)^{\frac{1}{p}}$$

Anderenfalls gibt es ein j mit $H(x_j) = H(x_{j+1})$. Somit gibt es ein $\ell \in \mathbb{Z}$ mit

$$2^{\frac{\ell-1}{p}} < \|x_{j+1}\| \leq \|x_j\| \leq 2^{\frac{\ell}{p}}$$

und somit

$$\|x_j + x_{j+1}\| \leq 2^{\frac{\ell+1}{p}}$$

Es folgt

$$H(x_j + x_{j+1})^p \leq H(x_j)^p + H(x_{j+1})^p$$

Wir wenden nun die Induktionsannahme auf die Folge $x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{n+1}$ an.

$$\|x_1 + \cdots + x_{n+1}\| \leq 2^{\frac{1}{p}}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_j + x_{j+1})^p + \cdots + H(x_{n+1})^p)^{\frac{1}{p}}$$

$\square$

Lemma 49 *Es sei $\| \ \|$ eine Δ-Norm auf X mit der Konstanten $C = 2^{\frac{1}{p}}$. Dann ist*

$$|||x||| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = x \right\}$$

eine F-Norm auf X, die dieselbe Topologie liefert.

Beweis. Man beachte, dass

$$\frac{1}{4}\|x\|^p \leq |||x||| \leq \|x\|^p$$

□

Satz 11 *Ein topologischer linearer Raum ist genau dann metrisierbar, wenn er Hausdorff ist und eine abzählbare Nullumgebungsbasis besitzt.*

Beweis. Es sei U_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Umgebungsbasis des Nullpunktes, so dass $\bigcap_n U_n = \{0\}$ und so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$$

gilt. Dann ist

$$\|x\| = \sup\{2^{-n} | x \notin U_n\}$$

eine Δ-Norm mit der Konstanten $C = 2$. □

Beispiel 10 *Es sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. $L^0(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ist der Raum der Äquivalenzklassen messbarer Funktionen, die fast überall gleich sind. Wir setzen*

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu$$

Dann ist d eine Metrik auf L^0.

Die Topologie, die von dem System von Umgebungen

$$V_\epsilon(f) = \{g| \ \mu(\{x| \ |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}) \leq \epsilon\}$$

erzeugt wird, heißt Topologie der Konvergenz im Maß. Die Topologie, die von der Metrik erzeugt wird, und die Topologie der Konvergenz im Maß sind gleich.

Insbesondere konvergiert eine Folge f_n genau dann in der Metrik d gegen f, wenn die Folge im Maß gegen f konvergiert.

Beweis. Wir zeigen, dass eine Menge genau dann eine Umgebung eines Punktes f in der Topologie der Metrik ist, wenn sie Umgebung in der Topologie der Konvergenz im Maß ist. Wegen der Translationsinvarianz reicht es, dies für $f = 0$ zu zeigen.

Wir zeigen, dass für alle $\epsilon > 0$

$$\{f | d(f, 0) < \epsilon^2\} \subseteq \{f | \mu\{x || f(x) \geq \epsilon\} < \epsilon\} \subseteq \{f | d(f, 0) < (1 + \mu(X))\epsilon\}$$

Die linke Inklusion folgt

$$\epsilon^2 > \int_X \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \geq \epsilon \mu \{x || f(x) \geq \epsilon\}$$

und damit

$$\epsilon > \mu\{x || f(x) \geq \epsilon\}$$

Die rechte Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_X \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \quad &= \int_{\{x||f(x)\geq\epsilon\}} \frac{|f|}{1+|f|} d\mu + \int_{\{x||f(x)<\epsilon\}} \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \\ &\leq \mu\{x||f(x) \geq \epsilon\} + \mu(X)\epsilon \leq (1+\mu(X))\epsilon \end{aligned}$$

□

Beispiel 11 *Es sei* $0 < p < 1$*. Dann ist* $L_p(\mu)$ *metrisierbar.*

Die Metrik hier ist

$$d(f,g) = \int |f-g|^p d\mu.$$

2.6 Normierte Vektorräume

Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Norm auf X ist eine Funktion

$$\| \ \| : X \to [0, \infty)$$

so dass
(i) für alle $x \in X$ und alle $t \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\|tx\| = |t| \ \|x\|$$

(ii) $x = 0$ genau dann, wenn $\|x\| = 0$.
(iii) für alle $x, y \in X$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

gilt.

Wir sagen, dass eine Seminorm vorliegt, wenn nur (i) und (iii) gelten.

Wir beobachten, dass $\rho : X \times X \to [0, \infty)$

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik auf X ist. Damit übertragen sich Begriffe und Eigenschaften metrischer Vektorräume auf normierte Vektorräume. Ein normierter Raum ist vollständig, wenn jede Cauchy Folge konvergiert. Ein vollständiger, normierter Raum heißt Banachraum.

Die Kugel um $x_0 \in X$ mit Radius r ist die Menge

$$B(x_0, r) = \{x | \|x - x_0\| < r\}.$$

Es gilt, dass der Abschluss von $B(x_0, r)$ die Menge $\overline{B}(x_0, r) = \{x | \|x - x_0\| \leq r\}$ ist. Dies gilt, weil die Folge $x_0 + (1 - \frac{1}{n})(x - x_0)$ gegen x konvergiert.

Ein normierter Raum ist ein topologischer Vektorraum. Dazu muss die Stetigkeit der Abbildung $\phi(x, y) = x + y$ nachgewiesen werden. Da diese linear ist, reicht es die Stetigkeit in $(0, 0)$ nachzuweisen. Es gilt

$$\phi^{-1}(\{z | \|z\| < \epsilon\}) = \{(x, y) | \|x + y\| < \epsilon\} \supseteq \{(x, y) | \|x\| < \frac{\epsilon}{2}, \|y\| < \frac{\epsilon}{2}\}$$

Wir sagen, dass zwei Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ auf X äquivalent sind, falls es Konstanten c_1 und c_2 gibt, so dass für alle $x \in X$

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

gilt.

Wir bezeichnen einen vollständigen, normierten Raum als Banachraum.

Lemma 50 *Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\| \|_2$ die Euklidische Norm. Jede Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ ist bzgl. der Euklidischen Norm eine stetige Funktion. Wir weisen dies nach. Es sei

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \|x\| = \quad & \| \sum_{i=1}^n x_i e_i \| \le \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \le \left(\max_{1 \le i \le n} \|e_i\| \right) \sum_{i=1}^n |x_i| \\ & \le \left(\max_{1 \le i \le n} \|e_i\| \right) \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\max_{1 \le i \le n} \|e_i\| \right) \sqrt{n}\ \|x\|_2 = c\|x\|_2 \end{aligned}$$

Die Stetigkeit im Punkt x_0 bedeutet

$$\forall \epsilon > 0 \forall x, \|x - x_0\|_2 < \delta : |\|x\| - \|x_0\|| < \epsilon.$$

Wir wählen $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ und erhalten

$$|\|x\| - \|x_0\|| \le \|x - x_0\| \le c\|x - x_0\|_2 < c\delta = \epsilon$$

Damit ist die Stetigkeit gezeigt. Die Menge

$$\partial B_2^n = \{x | \ \|x\|_2 = 1\}$$

ist kompakt. Deshalb werden

$$\inf_{\|x\|_2 = 1} \|x\| \quad \text{und} \quad \sup_{\|x\|_2 = 1} \|x\|$$

angenommen. Es gilt

$$c_1 = \min_{\|x\|_2 = 1} \|x\| > 0$$

weil das Minimum nicht im Punkt $x = 0$ angenommen werden kann. Somit gilt für alle x mit $\|x\|_2 = 1$

$$c_1 \le \|x\| \le c_2$$

Somit gilt für alle x mit $x \neq 0$

$$c_1 \le \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \le c_2$$

Also gilt für alle x

$$c_1 \|x\|_2 \le \|x\| \le c_2 \|x\|_2$$

□

Beispiel 12 *Es sei X der Raum aller reellen Folgen, von denen nur endlich viele Glieder von Null verschieden sind. Dann sind*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \qquad \textit{und} \qquad \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

zwei Normen auf X, die nicht äquivalent sind.

Beweis. Wir betrachten dazu

$$x_n = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n}, 0, \dots) \qquad n = 1, 2, \dots$$

Es gilt

$$\|x_n\|_1 = n \quad \text{und} \quad \|x_n\|_\infty = 1$$

□

Lemma 51 *Es sei X ein normierter Raum und es gelte*

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Dann gilt

$$\|x\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|$$

Beweis. Es gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : \|x - x_n\| < \epsilon$$

Hieraus folgt sofort mit der Dreiecksungleichung

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |\|x\| - \|x_n\|| < \epsilon$$

□

Wir sagen, dass

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

gilt, falls die Folge der Partialsummen

$$\sum_{n=1}^{k} x_n \qquad k = 1, 2, \dots$$

gegen x konvergiert. Wir sagen, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolut konvergiert, falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

Lemma 52 *Ein normierter Vektorraum X ist genau dann vollständig, falls jede absolut konvergente Reihe in X konvergiert.*

Beweis. Wir nehmen an, dass X vollständig ist und dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

gilt. Dann gilt

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \; \forall k > N : \sum_{n=k}^{\infty} \|x_n\| < \epsilon$$

Hieraus folgt

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \qquad \forall k, \ell > N :$$
$$\left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - \sum_{n=1}^{\ell} x_n \right\| = \left\| \sum_{n=\ell+1}^{k} x_n \right\| \leq \sum_{n=\ell+1}^{k} \|x_n\| \leq \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \|x_n\| < \epsilon$$

Dies bedeutet aber, dass

$$\sum_{n=1}^{k} x_n \qquad k = 1, 2, \dots$$

eine Cauchy Folge ist. Da aber jede Cauchy Folge konvergiert, so konvergiert die Reihe.

Wir nehmen nun an, dass jede absolutkonvergente Reihe in X konvergiert. Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge. Wir wählen

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \dots$$

so dass für alle $n, m \geq n_j$

$$\|x_n - x_m\| < 2^{-j}$$

gilt. Wir setzen

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{n_1} \\ y_j &= x_{n_j} - x_{n_{j-1}} \qquad j = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Es folgt

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_1} + \sum_{j=2}^{k} (x_{n_j} - x_{n_{j-1}}) = x_{n_k}$$

und

$$\sum_{j=1}^{k} \|y_j\| = \|x_{n_1}\| + \sum_{j=2}^{k} \|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{j=2}^{k} 2^{-j} \leq \|x_{n_1}\| + \tfrac{1}{2}$$

Deshalb konvergiert die Reihe

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} y_j$$

Dies bedeutet, dass die Folge x_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, gegen x konvergiert. Damit konvergiert eine Teilfolge der Cauchy-Folge und somit auch die Cauchy-Folge selbst. Wir geben hier der Vollständigkeit halber das Argument an. Für gegebenes $\epsilon > 0$ wählen wir k so groß, dass für alle n mit $n \geq n_k$

$$\|x_{n_k} - x_n\| \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad 2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$$

Hiermit ergibt sich für alle n mit $n > n_k$

$$\|x - x_n\| = \|x - x_{n_k} + x_{n_k} - x_n\| \leq \|x - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x_n\| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2^{-k} < \epsilon$$

gelten. $\Box$

Beispiel 13 *(i) Der Raum der stetigen Funktionen $C[a,b]$ mit der Norm*

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

ist ein Banachraum.
(ii) Der Raum der beschränkten Folgen

$$\ell_\infty = \left\{ (x(i))_{i=1}^\infty \,\middle|\, \sup_{i\in\mathbb{N}} |x(i)| < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x(i)|$$

ist ein Banachraum.
(iii) Der Raum aller konvergenten Folgen

$$c = \left\{ (x(i))_{i=1}^\infty \,\middle|\, \lim_{i\to\infty} x_i \text{ existiert} \right\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x(i)|$$

ist ein Banachraum. c ist ein abgeschlossener Teilraum von ℓ^∞.
(iv) Der Raum aller gegen 0 konvergenten Folgen

$$c_0 = \left\{ (x(i))_{i=1}^\infty \,\middle|\, \lim_{i\to\infty} x(i) = 0 \right\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x(i)|$$

ist ein Banachraum. c ist ein abgeschlossener Teilraum von c und ℓ^∞.

Beweis. (i) Es sei f_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein N, so dass für alle $n, m \geq N$ und alle $t \in [a,b]$

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon$$

gilt. Somit ist für jedes $t \in [a,b]$ die Folge $f_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge und

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

existiert.

Da f_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N, so dass für alle $n \geq N$, alle $t \in [a,b]$ und alle $m \geq N$

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon$$

gilt. Wir wählen nun zu jedem $t \in [a,b]$ die Zahl m so groß, dass $|f(t) - f_m(t)| < \epsilon$. Es folgt, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $n \geq N$ und alle $t \in [a,b]$

$$|f_n(t) - f(t)| < 2\epsilon$$

gilt. Dies bedeutet, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Damit ist f stetig und f_n konvergiert in $C[a,b]$ gegen f.

(ii) Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in ℓ_∞. Dann ist für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Folge der Koordinaten $x_n(i)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$. Somit existieren

$$x(i) = \lim_{n\to\infty} x_n(i)$$

Weil x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge ist, ist x eine beschränkte Folge, also in ℓ_∞. Wir zeigen nun, dass x_n, $n \in \mathbb{N}$, in ℓ_∞ gegen x konvergiert. Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein N, so dass für alle n, m mit $n, m \geq n$

$$\|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon$$

Somit gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein N, so dass für alle $n, m \geq N$ und alle $i \in \mathbb{N}$

$$|x_n(i) - x_m(i)| < \epsilon$$

gilt, bzw. zu jedem $\epsilon > 0$ ein N, so dass für alle $n \geq N$, alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $m \geq N$

$$|x_n(i) - x_m(i)| < \epsilon$$

gilt. Nun können wir zu jedem i die Zahl m so groß wählen, dass $|x_m(i) - x_i| < \epsilon$. (Die Zahl m hängt also von i ab.) Es folgt, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $n \geq N$ und alle $i \in \mathbb{N}$

$$|x_n(i) - x(i)| < 2\epsilon$$

□

Lemma 53 *(Lemma von Riesz) Es sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum von X, der von X verschieden ist. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein x mit $\|x\| = 1$*

$$\inf_{y\in Y} \|x - y\| \geq 1 - \delta$$

Beweis. Es sei $x \in X \setminus Y$. Weil Y eine abgeschlossene Menge und $\{x\}$ eine kompakte Menge ist, gilt

$$0 < \inf_{y\in Y} \|x - y\|.$$

Deshalb gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $y_\delta \in Y$ mit

$$(1-\delta)\|x - y_\delta\| \leq \inf_{y\in Y} \|x - y\|$$

Wir setzen nun

$$x_\delta = \frac{x - y_\delta}{\|x - y_\delta\|}$$

Offensichtlich gilt $\|x_\delta\| = 1$ und für alle $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned} \|x_\delta - y\| &= \left\| \frac{x}{\|x - y_\delta\|} - \frac{y_\delta}{\|x - y_\delta\|} - y \right\| \\ &= \frac{\|x - (y_\delta + \|x - y_\delta\| y)\|}{\|x - y_\delta\|} \end{aligned}$$

Weil $y_\delta + \|x - y_\delta\| y \in Y$ folgt

$$\|x_\delta - y\| \geq \frac{\inf_{y\in Y} \|x - y\|}{\|x - y_\delta\|} \geq 1 - \delta$$

□

Lemma 54 *Es sei X ein normierter Raum. Die abgeschlossene Einheitskugel von X ist genau dann kompakt, wenn X endlich-dimensional ist.*

Beweis. Der Raum sei endlich-dimensional. Dann ist X zu $\mathbb{R}^n$ mit $n = \dim(X)$ algebraisch isomorph. Nach Lemma 50 sind auf einem endlich-dimensionalen Raum alle Normen äquivalent. Deshalb ist ein normierter Raum der Dimension n isomorph zum $\mathbb{R}^n$. Also ist die abgeschlossene Einheitskugel kompakt.

Nun nehmen wir an, dass der Raum nicht endlich-dimensional ist. Nach dem Lemma von Riesz können wir eine Folge von Vektoren x_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ konstruieren. Also ist die abgeschlossene Einheitskugel nicht folgenkompakt. Nach Lemma 28 ist die Einheitskugel dann nicht kompakt. $\square$

Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Menge stetiger Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Wir sagen, dass $\mathcal{F}$ in einem Punkt $x \in X$ gleichgradig stetig ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von x gibt, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $y \in \mathcal{U}$

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

gilt. Wir sagen, dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist, wenn $\mathcal{F}$ in jedem Punkt gleichgradig stetig ist.

Lemma 55 *Die abgeschlossene, konvexe Hülle einer kompakten Menge in einem Banachraum ist kompakt.*

Beweis. Es sei K eine kompakte Menge eines Banachraumes X. Wir reicht zu zeigen, dass $\overline{\mathrm{CH}(K)}$ total beschränkt ist. Da K kompakt ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Elemente $x_1, \ldots, x_n$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(x_i, \epsilon).$$

Außerdem sei

$$S_n = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall i : s_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{n} s_i = 1 \right\}.$$

Es ist $A = S_n \times \overline{B}(x_1, \epsilon) \times \cdots \times \overline{B}(x_n, \epsilon)$ in der Produkttopologie kompakt, $f : A \to X$ mit

$$f(s, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} s_i y_i$$

stetig und das Bild von f kompakt. Wir zeigen noch, dass Bild(f) konvex ist:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} s_i y_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} t_i z_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda s_i + (1-\lambda) t_i) \frac{\lambda s_i y_i + (1-\lambda) t_i z_i}{\lambda s_i + (1-\lambda) t_i} \tag{2.5}$$

Bei diesem Schluss können wir o.E.d.A. annehmen, dass $\lambda s_i + (1-\lambda) t_i > 0$. Anderenfalls lassen wir diese Summanden weg.

$$\frac{\lambda s_i y_i + (1-\lambda) t_i z_i}{\lambda s_i + (1-\lambda) t_i}$$

ist eine Konvexkombination von y_i und z_i und damit ein Element von $\overline{B}(x_i, \epsilon)$. Weiter gilt

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda s_i + (1-\lambda)t_i) = 1$$

Also liegt (2.5) im Bild von f. $\square$

Lemma 56 *(Arzelà-Ascoli) (i) Es sei K ein kompakter Hausdorff Raum und $\mathcal{F}$ eine Familie gleichgradig stetiger Funktionen, die in jedem Punkt beschränkt ist. Dann ist $\mathcal{F}$ in dem Raum $C(K)$ mit der Supremumsnorm total beschränkt.*

(ii) Es sei X ein lokalkompakter Hausdorff Raum (jeder Punkt besitzt eine kompakte Umgebung), der abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist. Dann besitzt jede gleichgradig stetige Folge von Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ eine Teilfolge, die auf allen kompakten Teilmengen von X gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert.

Beweis. (i) Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ total beschränkt ist. Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung $U(x)$, so dass für alle $y \in U(x)$ und alle $f \in \mathcal{F}$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ gilt.

Offensichtlich ist $U(x), x \in K$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $U(x_1), \dots, U(x_n)$. Für jedes $x \in K$ ist die Menge $\{f(x) | f \in \mathbb{F}\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt. Damit ist

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{f(x_i)|f \in \mathcal{F}\}$$

beschränkt. Somit gibt es $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{f(x_i)|f \in \mathcal{F}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(t_j, \epsilon).$$

Wir definieren zu jeder Abbildung $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ eine Menge

$$\mathcal{F}_\sigma = \{f \in \mathcal{F} | \forall i, 1 \leq i \leq n : f(x_i) \in B(t_{\sigma(i)}, \epsilon)\}$$

Dann gilt $\bigcup_\sigma \mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}$. Es bleibt zu zeigen, dass für jedes σ der Durchmesser von $\mathcal{F}_\sigma$ kleiner als 4ϵ ist.

Es sei $x \in K$. Dann wählen wir i mit $x \in U(x_i)$. Dann gilt für alle $f, g \in \mathcal{F}_\sigma$

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - t_{\sigma(i)}| + |t_{\sigma(i)} - g(x_i)| + |g(x_i) - g(x)| \leq 4\epsilon$$

$\square$

Es sei (K, d) ein kompakter, metrischer Raum. Eine Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$ heißt gleichstetig, wenn für alle ϵ ein δ existiert, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $s, t \in K$ mit $d(s, t) < \delta$ die Ungleichung $|f(s) - f(t)| < \epsilon$ gilt.

Lemma 57 *(Arzelà-Ascoli) Es sei (K, d) ein kompakter, metrischer Raum und $C(K)$ der Raum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf K mit der Supremumsnorm. Eine Teilmenge $\mathcal{F}$ von $C(K)$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt, abgeschlossen und gleichstetig ist.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}$ kompakt ist. Dann ist $\mathcal{F}$ total beschränkt. Es gibt also für jedes ϵ endlich viele Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ aus $\mathcal{F}$ mit

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \epsilon).$$

Es gibt also zu jedem $f \in \mathcal{F}$ ein i_0, so dass

$$\|f - f_{i_0}\|_\infty < \epsilon.$$

Da K kompakt ist, sind alle Funktionen gleichmäßig stetig. Insbesondere gibt es zu jedem ϵ und i ein δ_i, so dass für alle x und y mit $|x - y| < \delta_i$ die Ungleichung $|f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon$ gilt. Wir setzen $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| \quad &= |f(x) - f_{i_0}(x) + f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y) + f_{i_0}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + |f_{i_0}(y) - f(y)| < 3\epsilon \end{aligned}$$

□

Man kann den Satz von Arzelà-Ascoli auch aus dem Satz von Tichonov herleiten [Ull].

2.7 Lokalkonvexe Räume

Ein topologischer Vektorraum heißt lokalkonvex, wenn er eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt. Man nennt die Topologie eines solchen Raumes auch lokalkonvex.

Eine Teilmenge A eines Vektorraumes heißt zentralsymmetrisch, wenn aus $x \in A$ folgt, dass für alle t mit $|t| \leq 1$ gilt $tx \in A$.

Eine Teilmenge A eines Vektorraumes heißt absolutkonvex, falls für alle s und t mit $|s| + |t| \leq 1$ und alle $x, y \in A$ die Relation $sx + ty \in A$ gilt.

Die absolutkonvexe Hülle einer Menge A ist die kleinste absolutkonvexe Menge, die A umfasst, d.h. der Schnitt über alle absolutkonvexen Mengen, die A umfassen.

Lemma 58 *Es sei X ein Vektorraum und A eine Teilmenge von X.*

(i) Die absolutkonvexe Hülle einer Menge A ist

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, x_i \in A, \sum_{i=1}^{n} |t_i| \leq 1 \right\}$$

(ii) Die absolutkonvexe Hülle von A ist gleich der konvexen Hülle der zentralsymmetrischen Hülle.

Lemma 59 *Falls X ein lokalkonvexer Vektorraum ist, dann besitzt er eine Nullumgebungsbasis aus konvexen, zentralsymmetrischen Mengen.*

Beweis. Nach Lemma 42 gibt es zu jeder Nullumgebung U eine zentralsymmetrische Nullumgebung V mit $V + V \subseteq U$. Dann ist die konvexe Hülle von V in U enthalten und absolutkonvex. $\square$

Lemma 60 *Ein Vektorraum ist genau dann lokalkonvex, wenn die Topologie von einem System von Halbnormen erzeugt wird.*

2.8 L_p-Räume

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $0 < p < \infty$ und f eine messbare, reellwertige Funktion. Wir setzen

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$L_p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ist der Raum aller Äquivalenzklassen von Funktionen, für die $\|f\|_p < \infty$ gilt und die fast überall gleich sind.

f sei eine messbare Funktion. Wir bezeichnen

$$\|f\|_\infty = \inf\{t > 0 |\ \mu\{x \in \Omega |\ |f(x)| > t\} = 0\}$$

als das wesentliche Supremum der Funktion f. Wir können dies auch so

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ \sup_{\Omega \setminus N} |f(x)| \,\middle|\, \mu(N) = 0 \right\}$$

schreiben. Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind, gibt es eine Nullmenge N mit

$$\|f\|_\infty = \sup_{\Omega \setminus N} |f(x)|.$$

$\|\ \|_\infty$ ist auf dem Raum

$$L_\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} |\ \|f\|_\infty < \infty\}$$

eine Norm. Wir weisen die Dreiecksungleichung nach. Es gibt Nullmengen N_f und N_g mit

$$\|f\|_\infty = \sup_{\Omega \setminus N_f} |f(x)| \qquad \|g\|_\infty = \sup_{\Omega \setminus N_g} |g(x)|$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty &= \sup_{\Omega \setminus N_f} |f(x)| + \sup_{\Omega \setminus N_g} |g(x)| \\ &\geq \sup_{\Omega \setminus (N_f \cup N_g)} |f(x)| + \sup_{\Omega \setminus (N_f \cup N_g)} |g(x)| \\ &\geq \sup_{\Omega \setminus (N_f \cup N_g)} |f(x) + g(x)| \geq \|f + g\|_\infty \end{aligned}$$

Die Räume L_p, $1 \leq p \leq \infty$, sind Banachräume. Die Räume für $0 < p < 1$ sind mit $d(f, g) = \int |f - g| d\mu$ vollständige, metrische Vektorräume. Sie sind aber keine normierten Räume.

Lemma 61 *(Young) Es seien $a \geq 0$, $b \geq 0$ und $0 < t < 1$. Dann gilt*

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1 - t)b$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = b$.

Beweis. Falls $a = 0$ oder $b = 0$, dann ist die linke Seite der Ungleichung gleich 0 und die Ungleichung ist erfüllt.

Der Logarithmus ist auf dem Intervall $(0, \infty)$ eine konkave Funktion. Dies gilt, weil die zweite Ableitung

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$$

negativ ist. Hieraus folgt für alle $a, b > 0$ und alle t mit $0 < t < 1$

$$\ln(ta + (1-t)b) \geq t \ln a + (1-t) \ln b = \ln a^t + \ln b^{1-t} = \ln(a^t b^{1-t}).$$

Da die Exponentialfunktion strikt monoton wachsend ist, folgt

$$ta + (1-t)b \geq a^t b^{1-t}$$

Wir zeigen nun, dass die Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b$. Wir setzen $c = a/b$. Dann nimmt die Ungleichung $ta + (1-t)b \geq a^t b^{1-t}$ die Gestalt

$$c^t \leq tc + (1-t)$$

an. Die Funktion $c^t - tc$ ist für $c < 1$ strikt wachsend und für $c > 1$ strikt fallend.

$$\frac{d}{dc}(c^t - tc) = tc^{t-1} - t$$

□

Lemma 62 *(Hölder) Es seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es seien f und g messbare Funktionen. Dann gilt*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Insbesondere folgt, dass $fg \in L_1$, falls $f \in L_p$ und $g \in L_q$. Außerdem gilt für $f \in L_p$ und $g \in L_q$ mit $f \neq 0$ und $g \neq 0$ genau dann

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q,$$

wenn fast überall

$$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \tag{2.6}$$

gilt .

Als Beispiel betrachten wir den Maßraum mit der Grundmenge $[0, 1]$, der σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen und dem Lebesguemaß. Zu $f(x) = x$ gibt es bis auf Multiplikation mit einem Skalar genau eine stetige, nichtnegative Funktion, für die $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ gilt. Dies ist die Funktion $x^{\frac{q}{p}}$.

Beweis. Falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$, dann sind f oder g fast überall 0. Deshalb gilt fast überall $fg = 0$ und somit $\|fg\|_1 = 0$. Man beachte hierbei die Konvention, dass $f(x)g(x) = 0$ gilt, falls $f(x) = 0$ und $g(x) = \infty$. Damit ist die Ungleichung in diesem Fall bewiesen und wir können weiterhin annehmen, dass $\|f\|_p > 0$ oder $\|g\|_q > 0$.

Ebenso folgt das Ergebnis sofort, wenn $\|f\|_p = \infty$ oder $\|g\|_q = \infty$.

Wir können also annehmen, dass $0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty$. Wir wenden Lemma 61 auf

$$a = \left|\frac{f(x)}{\|f\|_p}\right|^p \qquad b = \left|\frac{g(x)}{\|g\|_q}\right|^q \qquad t = \frac{1}{p}$$

an. Es gilt

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \tfrac{1}{p} a + \tfrac{1}{q} b$$

bzw.

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \tag{2.7}$$

Es folgt

$$\frac{\int_\Omega |f(x)g(x)| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{\int_\Omega |f(x)|^p d\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int_\Omega |g(x)|^q d\mu}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{2.8}$$

Deshalb gilt

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Wir betrachten nun den Fall der Gleichheit. Wir nehmen zuerst an, dass (2.6) gilt. Dann gilt

$$|g(x)| = \|g\|_q \frac{|f(x)|^{\frac{p}{q}}}{\|f\|_p^{\frac{p}{q}}}$$

und weiter

$$\int |fg| d\mu = \frac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{\frac{p}{q}}} \int_\Omega |f|^{1+\frac{p}{q}} d\mu = \frac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{\frac{p}{q}}} \int_\Omega |f|^p d\mu = \|f\|_p \|g\|_q$$

Nun zur Umkehrung. Falls

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| d\mu = \|f\|_p \|g\|_q$$

dann folgt mit (2.8)

$$0 = \int_\Omega \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} - \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} d\mu$$

Wegen (2.7) ist der Integrand eine nichtnegative Funktion und damit fast überall gleich 0. Nach Lemma 61 haben wir genau dann Gleichheit in $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b$, wenn $a = b$. D.h. es gilt fast überall

$$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

□

Lemma 63 *(Verallgemeinerte Hölder Ungleichung) Es seien $0 < r, u, w < \infty$ mit $\frac{1}{u} + \frac{1}{w} = \frac{1}{r}$ und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es seien f und g messbare Funktionen. Dann gilt*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_u \|g\|_w$$

Insbesondere folgt, dass $fg \in L_r$, falls $f \in L_u$ und $g \in L_w$. Außerdem gilt für $f \in L_u$ und $g \in L_w$, die nicht fast überall gleich 0 sind, genau dann

$$\|fg\|_r = \|f\|_u \|g\|_w,$$

wenn fast überall

$$\frac{|f(x)|^u}{\|f\|_u^u} = \frac{|g(x)|^w}{\|g\|_w^w}$$

gilt.

Beweis. Wir wenden die Hölder Ungleichung auf

$$p = \frac{u}{r} \qquad q = \frac{w}{r} \qquad |f|^r \qquad |g|^r$$

an. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_\Omega |fg|^r d\mu \quad &\leq \left(\int_\Omega |f|^{rp} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^{rq} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_\Omega |f|^u d\mu \right)^{\frac{r}{u}} \left(\int_\Omega |g|^w d\mu \right)^{\frac{r}{w}} \end{aligned}$$

□

Lemma 64 *Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.*
(i) (Minkowski) Es seien $1 \leq p < \infty$ und $f, g \in L_p$. Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Insbesondere ist L_p ein Vektorraum und $\| \ \|_p$ ist auf L_p eine Norm.

(ii) Es seien $0 < p < 1$ und $f, g \in L_p$. Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq 2^{\frac{1}{p} - 1} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right).$$

Es gibt genau eine Topologie, für die die Mengen

$$\{f \| \|f\|_p < \epsilon\} \qquad \epsilon > 0$$

eine Nullumgebungsbasis bilden und bzgl. der L_p ein topologischer Vektorraum ist.

$d(f, g) = \int |f - g|^p d\mu$ ist auf L^p eine Metrik, die dieselbe Topologie erzeugt.

Für $0 < p < 1$ ist $\| \ \|_p$ keine Norm, weil die Dreiecksungleichung nicht gilt.

Beweis. (i) Der Fall $p = 1$ ist offensichtlich, ebenso falls fast überall $f + g = 0$ gilt. Wir können also annehmen, dass $\|f + g\|_p > 0$.

Es gilt

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \leq (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}$$

Damit und mit der Hölder Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f + g|^p d\mu \quad &\leq \int_\Omega (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} d\mu \\
&= \int_\Omega |f||f + g|^{p-1} d\mu + \int_\Omega |g||f + g|^{p-1} d\mu \\
&\leq \|f\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_\Omega |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Weiter gilt $p = q(p - 1)$. Damit erhalten wir

$$\int_\Omega |f + g|^p d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_\Omega |f + g|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

(ii) Die Funktion $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\phi(x) = \frac{1 + x^r}{(1 + x)^r}.$$

nimmt in $x = 1$ ihr absolutes Minimum an. Wir weisen dies nach.

$$\phi'(x) = \frac{rx^{r-1}(1 + x)^r - r(1 + x^r)(1 + x)^{r-1}}{(1 + x)^{2r}} = \frac{r(x^{r-1} - 1)}{(1 + x)^{r+1}}$$

Für $r > 1$ ist ϕ auf $[0, \infty)$ stetig, auf $(0, 1)$ monoton fallend und auf $(1, \infty)$ monoton wachsend. Deshalb gilt für alle x mit $x \geq 0$

$$2^{1-r}(1 + x)^r \leq 1 + x^r.$$

Wir setzen nun $x = \frac{s}{t}$ und $r = \frac{1}{p}$ und erhalten für alle s, t mit $0 \leq s, t$

$$(s + t)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}(s^{\frac{1}{p}} + t^{\frac{1}{p}}).$$

Außerdem gilt für alle s, t mit $0 \leq s, t$

$$|s + t|^p \leq |t|^p + |s|^p$$

Diese Ungleichung folgt aus der Ungleichung

$$\left(a^{\frac{1}{p}}+b^{\frac{1}{p}}\right)^p \leq a+b$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p &= \left(\int_\Omega |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left\{\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\} = 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f\|_p+\|g\|_p\right)\end{aligned}$$

□

Satz 12 *Es seien $1 \leq p < \infty$ und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $L_p(\mu)$ mit der Norm $\| \ \|_p$ ein Banachraum.*

Der Maßraum muss nicht vollständig sein.

Beweis. Wegen Lemma 52 reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^\infty f_k$$

in $L_p(\mu)$ konvergiert, falls $\sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_p < \infty$. Wir zeigen zuerst, dass

$$\sum_{k=1}^\infty f_k \quad \text{punktweise fast überall konvergiert und} \quad \sum_{k=1}^\infty f_k \in L_p(\mu)$$

(Man beachte hier, dass die Elemente von L_p Äquivalenzklassen von Funktionen sind. Deshalb spielt es keine Rolle, dass auf einer Nullmenge keine punktweise Konvergenz vorliegt.) Dazu zeigen wir, dass

$$\sum_{k=1}^\infty |f_k| \quad \text{punktweise fast überall konvergiert und} \quad \sum_{k=1}^\infty |f_k| \in L_p(\mu)$$

Die Folge

$$\left(\sum_{k=1}^n |f_k|\right)^p \qquad n=1,2,\dots$$

ist monoton wachsend. Mit dem Satz über die monotone Konvergenz folgt, dass $(\sum_{k=1}^\infty |f_k|)^p$ eine messbare Funktion ist und

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n |f_k|\right)^p d\mu = \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^\infty |f_k|\right)^p d\mu$$

Hieraus ergibt sich mit der Minkowski Ungleichung

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_p = \sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p < \infty\end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k| \in L_p$$

Insbesondere gilt fast überall

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)| < \infty$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert, falls $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$ konvergiert, so konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

fast überall. Wegen

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|f_k|$$

folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \in L^p$.

Wir zeigen nun, dass $\sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$, in L^p gegen $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert. Da L^p ein Vektorraum ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k \in L^p$$

Damit folgt weiter

$$\left(\int\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k|\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mit dem Satz über die monotone Konvergenz folgt, dass der letzte Ausdruck zu dem folgenden gleich ist.

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int\left|\sum_{k=n+1}^{N} |f_k|\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mit der Ungleichung von Minkowski folgt, dass der letzte Ausdruck kleiner oder gleich

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\|f_k\|_p = \sum_{k=n+1}^{\infty}\|f_k\|_p$$

ist. Der letzte Ausdruck strebt für $n \to \infty$ gegen 0. □

Lemma 65 *Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.*
(i) L_∞ ist ein Banachraum.
(ii) Falls f und g messbare Funktionen sind, dann gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Es gilt genau dann Gleichheit, wenn auf der Menge $\{x|\ f(x) \neq 0\}$ mit Ausnahme einer Nullmenge

$$|g(x)| = \|g\|_\infty$$

gilt.

Beweis. (i) Es sei f_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$, gibt es eine Nullmenge $N_{n,m}$, so dass

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in \Omega \setminus N_{n,m}} |f_n(x) - f_m(x)|$$

Wir setzen nun

$$N = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} N_{n,m}$$

N ist eine Nullmenge und es gilt für alle n, m

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f_n(x) - f_m(x)|$$

Es folgt, dass für alle $x \in \Omega \setminus N$ die Folge $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ ist und damit konvergiert. Wir bezeichnen den Grenzwert mit $f(x)$. Dann ist f eine messbare Funktion, die auf $\Omega \setminus N$ beschränkt ist.

Wir zeigen nun, dass f_n, $n \in \mathbb{N}$ in der Norm gegen f konvergiert. Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein N, so dass für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in \Omega \setminus N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Nach einem Umsortieren der Quantoren erhalten wir, dass für alle $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $n \geq N$, alle $x \in \Omega \setminus N$ und alle $m \geq N$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

Nun können wir m in Abhängigkeit von x so groß wählen, dass $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$. Damit erhalten wir, dass für alle $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $n \geq N$, alle $x \in \Omega \setminus N$ und alle $m \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < 2\epsilon$$

(ii) Falls $\|g\|_\infty = \infty$ dann ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Es sei also nun $\|g\|_\infty < \infty$. Dann gibt es eine Funktion $\tilde{g}$, so dass fast überall $g = \tilde{g}$ und und für alle $x \in X$ die Ungleichung $|\tilde{g}(x)| \leq \|g\|_\infty$. Dann gilt

$$\|fg\|_1 = \int_\Omega |fg| d\mu \leq \int_\Omega |f| \|g\|_\infty d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Es gibt eine Nullmenge N, so dass

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\Omega\setminus N} |g(x)|$$

Aus $\|fg\|_1 = \|f\|_1\|g\|_\infty$ folgt

$$\int_{\Omega\setminus N} |fg| d\mu = \sup_{x\in\Omega\setminus N} |g(x)| \int_{\Omega\setminus N} |f| d\mu$$

und weiter

$$\int_{\Omega\setminus N} \left(\sup_{y\in\Omega\setminus N} |g(y)| - |g(x)| \right) |f| d\mu = 0$$

Da der Integrand nichtnegativ ist, folgt für fast alle $x \in \Omega$

$$\left(\sup_{y\in\Omega\setminus N} |g(y)| - |g(x)| \right) |f| = 0$$

□

Für $0 < p < \infty$ ist ℓ_p der Raum $L_p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist, also

$$\ell_p = \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \,\middle|\, x_i \in \mathbb{K} \text{ und } \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

Falls $1 \le p < \infty$, dann ist

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm und ℓ_p ein Banachraum.

ℓ_∞ ist der Raum aller beschränkten Folgen. Er ist mit der Norm

$$\|x\| = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$$

ausgestattet und ist ein Banachraum.

Lemma 66 *Es sei* $0 < p < q \le \infty$. *Dann gilt* $\ell_p \subset \ell_q$ *und für alle* $x \in \ell_q$ *gilt*

$$\|x\|_q \le \|x\|_p$$

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall $q = \infty$. Offensichtlich gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|x_k| \le \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

und damit

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \le \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Nun der Fall $q < \infty$.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^q &= \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p |x_i|^{q-p} \le \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p\right) \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^{q-p} \\ &= \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p\right)\left(\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|\right)^{q-p} \le \|x\|_p^p \|x\|_p^{q-p} = \|x\|_p^q\end{aligned}$$

□

Lemma 67 *Es sei $0 < p < q \le \infty$ und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum mit endlichem Maß $\mu(\Omega) < \infty$. Dann gilt $L_q \subset L_p$ und*

$$\|f\|_p \le (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

Beweis. Wir wenden die verallgemeinerte Hölder Ungleichung auf die Funktionen f und χ_Ω und die Exponenten p, q und $\frac{pq}{q-p}$ an. Es gilt $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{q-p}{pq}$ und wir erhalten

$$\|f\|_p \le \|f\|_q \|\chi_\Omega\|_{\frac{pq}{q-p}}$$

□

Lemma 68 *Es sei $1 \le p < \infty$ und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Dann ist die Menge der einfachen Funktionen*

$$f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j} \qquad \mu(E_j) < \infty \quad n \in \mathbb{N}$$

dicht in L_p.

Beweis. Es gibt eine Folge einfacher Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, die punktweise überall gegen f konvergiert und für die fast überall und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|f_n| \le |f|$ gilt. Wir erhalten $\mu(E_j) < \infty$, weil fast überall $|f_n| \le |f|$ gilt und $f \in L^p$.

Damit folgt $|f_n - f|^p \le (|f_n| + |f|)^p \le 2^p |f|^p$. Wir wenden nun den Konvergenzsatz von Lebesgue auf diese Folge an. Es gilt $2^p|f|^p \in L^1$ und $|f_n - f|^p$ konvergiert fast überall gegen 0. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

□

Lemma 69 *(i) Für alle endlichen Folgen f_i, $i = 1, \dots, n$, von Vektoren aus $L_p(\Omega)$, $2 \le p < \infty$, gilt*

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(ii) Für alle endlichen Folgen f_i, $i = 1, \dots, n$, von Vektoren aus $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le 2$, gilt

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis. (i) Mit der Dreiecksungleichung

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{2}{p}} = \left\| \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right\|_{\frac{p}{2}}$$
$$\le \sum_{i=1}^n \left\| |f_i|^2 \right\|_{\frac{p}{2}} = \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega \right)^{\frac{2}{p}} = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2$$

Hieraus folgt

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega \right) \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega \right)^{\frac{2}{p}-1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega |f_i|^p \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega \right)^{\frac{2}{p}-1} d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |f_i|^p \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega \right)^{\frac{2}{p}-1} d\omega \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Mit der Hölder Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f_i|^p \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n (|f_i|^p)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}-1}\right)^{\frac{2}{2-p}}\right)\right)^{\frac{2-p}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{2-p}{2}}\end{aligned}$$

Es folgt

$$\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i|^p d\omega\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{2-p}{2}\frac{1}{2}}$$

und damit

$$\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}\frac{p}{2}} \leq \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\omega\right)^{\frac{1}{2}}$$

Also

$$\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\omega\right)^{\frac{1}{p}}$$

□

Lemma 70 *Es sei* (Ω, μ) *ein Maßraum. Es sei* $f : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ *eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\left(\int_\Omega \left|\int_0^1 |f(t,\omega)| dt\right|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 \left(\int_\Omega |f(t,\omega)|^p \, d\omega\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\int_0^1 |f(t,\omega)| dt\right|^p d\omega &= \int_\Omega \int_0^1 |f(t,\omega)| dt \left(\int_0^1 |f(s,\omega)| ds\right)^{p-1} d\omega \\ &= \int_0^1 \int_\Omega |f(t,\omega)| \left(\int_0^1 |f(s,\omega)| ds\right)^{p-1} d\omega dt\end{aligned}$$

Nun wenden wir wie im Beweis zur Minkowski Ungleichung die Hölder Ungleichung an.

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left|\int_0^1 |f(t,\omega)| dt\right|^p d\omega \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_\Omega |f(t,\omega)|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \left(\int_0^1 |f(s,\omega)| ds\right)^{q(p-1)} d\omega\right)^{\frac{1}{q}} dt\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\left(\int_\Omega \left|\int_0^1 |f(t,\omega)|dt\right|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 \left(\int_\Omega |f(t,\omega)|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

□

Lemma 71 *Es sei* $1 \leq p < \infty$. *Eine Teilmenge* K *von* ℓ_p *ist genau dann relativ kompakt in der Norm Topologie, wenn für alle* $\epsilon > 0$ *ein* N *existiert, so dass für alle* $x \in A$

$$\sum_{j=N}^{\infty} |x(j)|^p < \epsilon$$

gilt.

Beweis. □

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und X ein Banachraum. Eine Funktion $f : \Omega \to X$ ist messbar, wenn das Urbild jeder Borelmenge ein Element der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist. f heißt stark messbar, wenn f messbar ist und das Bild von f separabel ist.

Eine Funktion heißt einfach, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.

Lemma 72 *Es sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* X *ein Banachraum. Die Abbildung* $f : \Omega \to X$ *sei messbar. Dann ist die Abbildung* $\|f\| : \Omega \to \mathbb{R}$ *messbar.*

Eine Funktion $f : \Omega \to X$ ist integrierbar, wenn sie stark messbar ist und die Funktion $\omega \to \|f(\omega)\|$ integriebar ist.

Das Integral einer einfachen, messbaren Funktion $\sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i)$$

Es sei f integrierbar und ϕ_k, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge messbarer, einfacher Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Außerdem sei die Abbildung $\omega \to \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\phi_k(\omega)\|$ integrierbar. Dann setzen wir

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi_k d\mu$$

Es sei $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Menge aller stark messbaren Funktionen $f : \Omega \to X$ mit

$$\int_\Omega \|f(\omega)\|_X d\mu < \infty$$

ein Vektorraum.

$$\|f\|_{L_p(\Omega,X)} = \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_X^p d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.9}$$

ist auf diesem Vektorraum eine Halbnorm. Wir gehen nun zu dem Raum aller Äquivalenzklassen über und erhalten einen Banachraum.

2.9 Ungleichungen von Hanner und Clarkson

Die Parallelogrammgleichung besagt, dass die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen ist. In Vektorenschreibweise gilt im $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Norm

$$\|x+y\|_2^2+\|x-y\|_2^2=2\|x\|_2^2+2\|y\|_2^2.$$

Dies ist beim Rechnen mit Vektoren sehr nützlich. Leider gilt diese Gleichung nicht für beliebige Normen. In den L_p-Räumen gelten aber die Ungleichungen von Hanner. Ein einfacher Beweis findet sich in [RoW].

Satz 13 *(Hanner) Es sei $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum und $f,g\in L_p(X,\mathfrak{A},\mu)$.*
(i) Falls $1\leq p\leq 2$ gilt, dann

$$\big|\|f\|_p+\|g\|_p\big|^p+\big|\|f\|_p-\|g\|_p\big|^p\leq\|f+g\|_p^p+\|f-g\|_p^p$$

und

$$\big|\|f+g\|_p+\|f-g\|_p\big|^p+\big|\|f+g\|_p-\|f-g\|_p\big|^p\leq 2^p\left|\|f\|_p^p+\|g\|_p^p\right|$$

(ii) Falls $2\leq p<\infty$, dann gelten die umgekehrten Ungleichungen.

Für $2\leq p<\infty$ gelten die umgekehrten Ungleichungen. Aus den Ungleichungen von Hanner kann man die Ungleichungen von Clarkson herleiten.

Die Ungleichungen von Hanner haben eine Reihe von Anwendungen. Mit ihrer Hilfe kann man nachweisen, dass die Räume L_p, $1<p<\infty$, uniform konvex sind, und man kann den Konvexitätsmodul dieser Räume berechnen.

Die Existenz einer Bestapproximation in L_p lässt sich ebenfalls mit den Ungleichungen von Hanner nachweisen.

Lemma 73 *(i) Es sei $1\leq p\leq 2$. Dann gilt für alle $0<r\leq 1$ und $A,B\in\mathbb{R}$*

$$\begin{aligned}((1+r)^{p-1}+(1-r)^{p-1})|A|^p+((1+r)^{p-1}-(1-r)^{p-1})r^{1-p}|B|^p\\ \leq|A+B|^p+|A-B|^p\end{aligned}$$

(ii) Falls $2\leq p<\infty$, dann gilt die umgekehrte Ungleichung.

Beweis. Der Fall $p=1$ ist

$$2|A|\leq 2\max\{|A|,|B|\}=|A+B|+|A-B|.$$

Der Fall $p=2$ ist

$$2|A|^2+2|B|^2=|A+B|^2+|A-B|^2.$$

Nun betrachten wir die Fälle $1 < p < 2$. Es sei $0 < R \leq 1$ und $F : (0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$F(r) = ((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}) + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}R^p$$

F nimmt ihr absolutes Maximum im Punkt $r = R$ an. Es gilt

$$\begin{aligned}
F'(r) &= \left(((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}) + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}R^p\right)' \\
&= (p-1)\left\{(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}\right\} \\
&\qquad +(p-1)((1+r)^{p-2} + (1-r)^{p-2})r^{1-p}R^p \\
&\qquad\qquad +(1-p)((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{-p}R^p \\
&= (p-1)\left\{(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}\right\} \\
&\quad +(p-1)\left(\frac{R}{r}\right)^p \left\{r(1+r)^{p-2} + r(1-r)^{p-2} - (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}\right\} \\
&= (p-1)((1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2})\left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^p\right)
\end{aligned}$$

Da $p-2 < 0$ folgt, dass F für $r < R$ strikt wachsend ist und für $r > R$ strikt fallend ist.

$$\begin{aligned}
F(R) &= ((1+R)^{p-1} + (1-R)^{p-1}) + ((1+R)^{p-1} - (1-R)^{p-1})R \\
&= (1+R)^p + (1-R)^p
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $0 < r \leq 1$ und alle $0 < R \leq 1$

$$\begin{aligned}
((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}) + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}R^p& \\
\leq (1+R)^p + (1-R)^p&
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Ausdrücke in R, gilt die Abschätzung auch für $R = 0$. Wir multiplizieren mit A^p

$$\begin{aligned}
((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1})A^p + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}(AR)^p& \\
\leq (A+AR)^p + (A-AR)^p&
\end{aligned}$$

und setzen $B = AR$

$$\begin{aligned}
((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1})A^p + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}B^p& \\
\leq (A+B)^p + (A-B)^p&
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Ungleichung für alle A und B mit $0 \leq B \leq A$ gezeigt. (Wir müssen beachten, dass $A - B \geq 0$, weil anderenfalls der Ausdruck $(A-B)^p$ nicht sinnvoll ist.)

Wir beobachten nun, dass für alle r mit $0 < r \leq 1$

$$((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p} \leq (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} \tag{2.10}$$

Wir prüfen dies nach. Die Funktion $(1+r)^{p-1}+(1-r)^{p-1}$ ist auf $(0,1]$ monoton fallend. Dies folgt, weil die Ableitung

$$(p-1)\{(1+r)^{p-2}-(1-r)^{p-2}\}$$

auf $(0,1)$ negativ ist. Somit gilt

$$2^{p-1} \leq (1+r)^{p-1}+(1-r)^{p-1} \tag{2.11}$$

Wir betrachten nun die Funktion $((1+r)^{p-1}-(1-r)^{p-1})r^{1-p}$ auf $(0,1]$. Wir setzen $s=\frac{1}{r}$ und erhalten die Funktion $(s+1)^{p-1}-(s-1)^{p-1}$ auf $[1,\infty)$. Diese Funktion ist auf $[1,\infty)$ monoton fallend. Dazu rechnen wir die Ableitung

$$(p-1)\{(s+1)^{p-2}-(s-1)^{p-2}\}$$

aus und stellen fest, dass sie negativ ist, weil $p<2$. Es folgt

$$2^{p-1} \geq ((1+r)^{p-1}-(1-r)^{p-1})r^{1-p} \tag{2.12}$$

Aus (2.11) und (2.12) folgt nun (2.10). Wir betrachten den Fall $0 \leq A \leq B$.

$$\begin{aligned}
&((1+r)^{p-1}+(1-r)^{p-1})A^p+((1+r)^{p-1}-(1-r)^{p-1})r^{1-p}B^p \\
&\leq ((1+r)^{p-1}+(1-r)^{p-1})B^p+((1+r)^{p-1}-(1-r)^{p-1})r^{1-p}A^p \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq (A+B)^p+(B-A)^p
\end{aligned}$$

Also gilt für alle A,B mit $0 \leq A,B$

$$\begin{aligned}
&((1+r)^{p-1}+(1-r)^{p-1})|A|^p+((1+r)^{p-1}-(1-r)^{p-1})r^{1-p}|B|^p \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq |A+B|^p+|A-B|^p
\end{aligned}$$

Weder die linke, noch die rechte Seite hängt von den Vorzeichen von A und B ab. Also haben wir die Ungleichung für alle A und B gezeigt. $\square$

Beweis von Satz 13. (i) Die zweite Ungleichung folgt aus der ersten Ungleichung, indem man für f die Funktion $f+g$ einsetzt und für g die Funktion $f-g$. Wir betrachten zuerst den Fall $p=1$. Wir können annehmen, dass $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|\|f\|_1+\|g\|_1|+|\|f\|_1-\|g\|_1| = 2\|f\|_1 \leq \|f+g\|_1+\|f-g\|_1.$$

Nun behandeln wir den Fall $p=2$. Hier sind die Ungleichungen tatsächlich Gleichungen.

$$\|f+g\|_2^2+\|f-g\|_2^2 = \int |f+g|^2 d\mu + \int |f-g|^2 d\mu = 2\int f^2+g^2 d\mu = 2\|f\|_2^2+2\|g\|_2^2$$

$$|\|f\|_2+\|g\|_2|^2+|\|f\|_2-\|g\|_2|^2 = 2\|f\|_2^2+2\|g\|_2^2$$

Wir betrachten nun den Fall $1 < p < 2$. Wir können annehmen, dass $\|g\|_p \leq \|f\|_p$. Nach Lemma gilt für alle r mit $0 < r \leq 1$ und alle $x \in X$

$$((1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1})|f(x)|^p + ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}|g(x)|^p \\ \leq |f(x)+g(x)|^p + |f(x)-g(x)|^p.$$

Wir setzen $r = \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}$ und erhalten

$$\left(\left(1+\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1} + \left(1-\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\right)|f(x)|^p \\ + \left(\left(1+\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1} - \left(1-\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\right)\frac{\|g\|_p^{1-p}}{\|f\|_p^{1-p}}|g(x)|^p \\ \leq |f(x)+g(x)|^p + |f(x)-g(x)|^p.$$

Wir integrieren beide Seiten und erhalten

$$\left(\left(1+\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1} + \left(1-\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\right)\|f\|_p^p \\ + \left(\left(1+\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1} - \left(1-\frac{\|g\|_p}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\right)\frac{\|g\|_p^{1-p}}{\|f\|_p^{1-p}}\|g\|_p^p \\ \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

und weiter

$$\left((\|f\|_p + \|g\|_p)^{p-1} + (\|f\|_p - \|g\|_p)^{p-1}\right)\|f\|_p \\ + \left((\|f\|_p + \|g\|_p)^{p-1} - (\|f\|_p - \|g\|_p)^{p-1}\right)\|g\|_p \\ \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

Wir erhalten

$$(\|f\|_p + \|g\|_p)^p + (\|f\|_p - \|g\|_p)^p \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

□

Korollar 2 *Es sei $1 < p < \infty$, $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und K eine konvexe Teilmenge vom L_p, die in der Norm-Topologie abgeschlossen ist. Es sei $f \in L_p$. Dann gibt es genau ein $h \in K$, so dass*

$$\|f-h\| = \inf_{g \in K} \|f-g\|$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $f = 0$. Wir setzen $D = \inf_{g \in K} \|g\|$. Es sei h_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in K, so dass

$$\lim_{n \to \infty} \|h_n\| = D$$

Wir zeigen, dass h_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in der Norm-Topologie ist. Da L_p vollständig ist, gibt es damit ein h mit den gewünschten Eigenschaften.

Wir zeigen, dass
$$\lim_{n,m\to\infty} \|h_n + h_m\| = 2D.$$
Aus der Dreiecksungleichung folgt $\|h_n + h_m\| \leq \|h_n\| + \|h_m\|$ und deshalb
$$\limsup_{n,m\to\infty} \|h_n + h_m\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|h_n\| + \limsup_{m\to\infty} \|h_m\| \leq 2D$$
Weil K konvex ist, gilt $\frac{1}{2}(h_n + h_m) \in K$. Es folgt
$$\|\tfrac{1}{2}(h_n + h_m)\| \geq D$$
Mit Hanners Ungleichung folgt
$$\begin{aligned} |\|h_n + h_m\|_p + \|h_n - h_m\|_p|^p + |\|h_n + h_n\|_p - \|h_n - h_m\|_p|^p \\ \leq 2^p \left|\|h_n\|_p^p + \|h_m\|_p^p\right| \end{aligned}$$
Die rechte Seite konvergiert für $n, m \to \infty$ gegen $2^{p+1}D$. Falls h_n, $n \in \mathbb{N}$, keine Cauchy-Folge ist, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass
$$(2D + \epsilon)^p + (2D - \epsilon)^p \leq 2^{p+1}D$$
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2D + x|^p$, ist strikt konvex. Deshalb
$$(2D)^p = f(0) = f(\tfrac{1}{2}\epsilon - \tfrac{1}{2}\epsilon) < \tfrac{1}{2}(f(\epsilon) + f(-\epsilon)) = \tfrac{1}{2}(2D + \epsilon)^p + (2D - \epsilon)^p$$
Somit gilt
$$2(2D)^p < (2D + \epsilon)^p + (2D - \epsilon)^p$$
Dies ist ein Widerspruch.

Der Vektor h ist eindeutig. Falls nicht, so gäbe es mindestens zwei Vektoren h und $\tilde{h}$ mit minimalem Abstand. Wie wir bereits oben gezeigt haben, ist dann die Folge h_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $h_n = h$, falls n gerade, und $h_n = \tilde{h}$, falls n ungerade, eine Cauchy-Folge. Also gilt $h = \tilde{h}$. □

Satz 14 *(Ungleichungen von Clarkson)[Cla] (i) Es sei $2 \leq p < \infty$.*

$$(\|x + y\|_p^p + \|x - y\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}(\|x\|_p^{p'} + \|y\|_p^{p'})^{\frac{1}{p'}} \tag{2.13}$$

$$2^{\frac{1}{p'}}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\|x + y\|_p^{p'} + \|x - y\|_p^{p'})^{\frac{1}{p'}} \tag{2.14}$$

(ii) Für $1 < p \leq 2$ gelten die umgekehrten Ungleichungen.

Lemma 74 *Für alle p mit $2 \leq p < \infty$ und alle $t, s \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t, s$ gilt*
$$(|t + s|^p + |t - s|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}(t^{p'} + s^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass für alle c mit $0 < c < 1$ die Ungleichung

$$(|1+c|^p + |1-c|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}(1+c^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

gilt. Wir ersetzen nun

$$c = \frac{1-z}{1+z}$$

und erhalten für z mit $0 < z < 1$

$$(1+z^p)^{p'-1} \leq \tfrac{1}{2}\{(1+z)^{p'} + (1-z)^{p'}\}$$

Wir entwickeln die Funktion

$$S(z) = \tfrac{1}{2}\{(1+z)^{p'} + (1-z)^{p'}\} - (1+z^p)^{p'-1}$$

in ihre Taylorreihe und zeigen, dass sie für $0 < z < 1$ nicht negativ ist. Es gilt

$$\tfrac{1}{2}\{(1+z)^{p'} + (1-z)^{p'}\} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p'(p'-1)(2-p')\cdots(2k-1-p')}{(2k)!} z^{2k}$$

und

$$(1+z^p)^{p'-1} = 1 + (p'-1)z^p + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(p'-1)(2-p')\cdots(m-p')}{m!} z^{mp}$$

Da $1 \leq p' < 2$

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-p')(3-p')\cdots(2k-p')}{(2k-1)!} z^{2k} \left\{ \frac{1-z^{\frac{2k-p'}{p'-1}}}{\frac{2k-p'}{p'-1}} - \frac{1-z^{\frac{2k}{p'-1}}}{\frac{2k}{p'-1}} \right\}$$

Die Funktion $\frac{1}{t}(1-z^t)$ ist für $0 < t$ und $0 < z < 1$ eine fallende Funktion in t. Deshalb sind die Summanden in der Reihenentwicklung von S nicht negativ. □

Beweis. (i) Wir zeigen die Ungleichung (2.13). Die Ungleichung von Hanner ist

$$\big|\|f\|_p + \|g\|_p\big|^p + \big|\|f\|_p - \|g\|_p\big|^p \geq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p$$

Nun reicht es zu zeigen, dass für alle $t, s \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t, s$

$$(|t+s|^p + |t-s|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}}(t^{p'} + s^{p'})^{\frac{1}{p'}}$$

□

2.10 Orliczräume

Eine konvexe Funktion $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $M(t) = M(-t)$, $M(0) = 0$ und $M(t) > 0$ für $t \neq 0$ heißt Orliczfunktion. Der Raum

$$\ell_M = \left\{ x = (x(n))_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} M(x(n)) < \infty \right. \right\}$$

heißt Orliczraum und wird mit der Norm

$$\|x\|_M = \inf \left\{ t > 0 \left| \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{|x(n)|}{t}\right) \leq 1 \right. \right\}$$

ausgestattet. Es stellt sich heraus, dass ℓ_M mit dieser Norm ein Banachraum ist. In dem von den Einheitsvektoren e_n, $n \in \mathbb{N}$, aufgespannten Teilraum von ℓ_M ist e_n, $n \in \mathbb{N}$, eine symmetrische Basis. Für $M(t) = |t|^p$ erhalten wir gerade ℓ_p.

Es sei $p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, nicht fallende rechtsseitig stetige Funktion mit $p(0) = 0$, $p(t) > 0$ für $t > 0$ und $\lim_{t \to \infty} p(t) = \infty$. Dann bezeichnen wir

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t$$

als die Rechtsinverse von p. Dann besitzt q dieselben Eigenschaften wie p. Außerdem gelten

$$q(p(t)) \geq t \qquad\qquad p(q(s)) \geq s$$

Dies ergibt sich sofort aus

$$q(p(t)) = \sup_{p(u) \leq p(t)} u \geq t$$

Wir haben hier i.A. keine Gleichheit, wenn p auf einem Teilintervall konstant ist. Dann gibt es möglicherweise ein u mit $u > t$ und $p(u) = p(t)$.

$$p(q(s)) = p\left(\sup_{p(t) \leq s} t\right)$$

Wegen $\lim_{t \to \infty} p(t) = \infty$ gibt es ein t_0 mit

$$t_0 = \sup_{p(t) \leq s} t \qquad\qquad p(t_0 + \epsilon) > s$$

Da p rechtsseitig stetig ist, folgt $p(t_0) \geq s$, also

$$p(q(s)) \geq s$$

Eine konvexe Funktion besitzt überall eine rechtsseitige Ableitung. Wir wollen die rechtsseitige Ableitung einer Orliczfunktion M mit M' bezeichnen. M' ist eine nichtnegative, wachsende, rechtsseitig stetige Funktion. Im Folgenden betrachten wir nur solche Orliczfunktionen, die $M'(0) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} M'(t) = \infty$ erfüllen. (Hierdurch schließen wir $M(t) = t$ aus.) Die Rechtsinverse M'^{-1} von M' ist

$$M'^{-1}(u) = \sup\{t | M'(t) \leq u\}$$

Die rechtsseitige Inverse von M' bezeichnen wir mit M'^{-1}. Die zu M komplementäre Funktion M^* ist durch

$$M^*(t) = \int_0^t M'^{-1}(s)ds$$

gegeben, wobei M'^{-1} die zu M' Rechtsinverse ist.

Die komplementäre Funktion zu $M(t) = \frac{1}{p}|t|^p$ ist $M^*(t) = \frac{1}{q}|t|^q$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemma 75 *(i) (Ungleichung von Young) Für alle s, t mit $0 \leq s, t$ gilt*

$$st \leq M(s) + M^*(t)$$

Für $t = M'(s)$ oder $s = M'^{-1}(t)$ gilt Gleichheit in der Ungleichung.
(ii)

$$M^*(t) = \max_{s\geq 0}\{st - M(s)\}$$

$$M(s) = \max_{t\geq 0}\{st - M^*(t)\}$$

(iii) $M^{**} = M$
(iv) Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\tfrac{1}{2}kM^{*-1}(\tfrac{1}{k}) \leq \frac{1}{M^{-1}(\frac{1}{k})} \leq kM^{*-1}(\tfrac{1}{k})$$

Beweis. (i)

$$M(s) + M^*(t) = \int_0^s M'(x)dx + \int_0^t M'^{-1}(x)dx$$

Falls $t = M'(s)$, dann addieren sich die Flächen unter M' und M'^{-1} gerade zu der Fläche des Rechtecks mit Seitenlängen s und $M'(s)$ auf. Es gilt also

$$sM'(s) = M(s) + M^*(M'(s))$$

Falls $t > M'(s)$, dann

$$\begin{aligned} M(s) + M^*(t) \quad &= \int_0^s M'(x)dx + \int_0^t M'^{-1}(x)dx \\ &= \int_0^s M'(x)dx + \int_0^{M'(s)} M'^{-1}(x)dx + \int_{M'(s)}^t M'^{-1}(x)dx \\ &= sM'(s) + \int_{M'(s)}^t M'^{-1}(x)dx \\ &\geq sM'(s) + (t - M'(s))M'^{-1}(M'(s)) \geq st \end{aligned}$$

(ii) Aus der Ungleichung von Young folgt

$$M^*(t) \geq st - M(s)$$

Da wir für $s = M'(t)$ Gleichheit haben, folgt die Behauptung.

(iii) folgt sofort aus (ii).

(iv) Aus (i) folgt mit $s = M^{-1}(\frac{1}{k})$ und $t = M^{*-1}(\frac{1}{k})$ die linke Ungleichung $\Box$

Lemma 76 *Der Dualraum $(\ell_M^n)^*$ von ℓ_M^n kann mit dem $\mathbb{R}^n$ mit der Norm*

$$|||y||| = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n x(i)y(i) \,\middle|\, \|x\|_M = 1 \right\}$$

identifiziert werden. Es gilt für alle x

$$\|x\|_{M^*} \leq |||x||| \leq 2\|x\|_{M^*}, \tag{2.15}$$

Beweis. Die rechte Ungleichung folgt sofort aus der Ungleichung von Young. In der Tat

$$\begin{aligned} |||y||| &= \sup_{\|x\|_M=1} \sum_{i=1}^n x(i)y(i) \\ &\leq \sup_{\|x\|_M=1} \sum_{i=1}^n M(x(i)) + M^*(y(i)) = 1 + \sum_{i=1}^n M^*(y(i)) \end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt nun für $\|y\|_{M^*} = 1$.

Wir zeigen nun die linke Ungleichung. Es gelte

$$|||x||| = 1$$

und wir setzen

$$y(k) = M^{*\prime}(x(k)) \qquad k = 1, \ldots, n$$

Dann gilt nach Lemma 75

$$|x(k)|y(k) = M(y(k)) + M^*(x(k)) \qquad k = 1, \ldots, n$$

Falls

$$\sum_{k=1}^n M(y(k)) > 1$$

dann folgt aus der Konvexität von M

$$M\left(\frac{y(k)}{\sum_{i=1}^n M(y(i))}\right) \leq \frac{M(y(k))}{\sum_{i=1}^n M(y(i))}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^n M\left(\frac{y(k)}{\sum_{i=1}^n M(y(i))}\right) \leq 1$$

Hiermit folgt

$$1 = |||x||| \geq \sum_{k=1}^{n} |x(k)| \frac{y(k)}{\sum_{i=1}^{n} M(y(i))}$$

und damit

$$\sum_{i=1}^{n} M(y(i)) \geq \sum_{k=1}^{n} |x(k)| y(k) = \sum_{k=1}^{n} M^*(x(k)) + \sum_{k=1}^{n} M(y(k))$$

Hieraus folgt $\sum_{k=1}^{n} M^*(x(k)) = 0$, was falsch ist. Also muss

$$\sum_{k=1}^{n} M(y(k)) \leq 1$$

gelten. Es folgt

$$1 = |||x|| \geq \sum_{k=1}^{n} |x(k)| y(k) \geq \sum_{k=1}^{n} M^*(x(k)) + \sum_{k=1}^{n} M(y(k))$$

und somit

$$1 \geq \sum_{k=1}^{n} M^*(x(k))$$

Also gilt

$$\|x\|_{M^*} \leq 1 = |||x|$$

□

Es sei $M : [0, \infty) \to [0, \infty]$ eine konvexe, linksseitig stetige Funktion mit $M(0) = 0$. (Die Topologie in $[0, \infty]$ wird von den Mengen (a, b), $[0, a)$ und $(b, \infty]$ erzeugt.) Wir schließen aus, dass M die konstante Funktion 0 ist und auch dass M die Funktion ist, die in 0 den Wert 0 annimmt und ansonsten den Wert ∞. Eine solche Funktion bezeichnen wir als Young Funktion oder auch Orlicz Funktion.

M kann den Wert ∞ annehmen und M ist konvex, wenn M auf dem Intervall, auf dem M endliche Werte annimmt, konvex ist. M ist auf dem Intervall, auf dem M nur endliche Werte annimmt, wegen der Konvexität stetig. Die Forderung, dass M linksseitig stetig ist, ist nur in dem Punkt von Bedeutung, in dem M einen Sprung (nach unendlich) besitzt.

Wir fassen den Begriff der Orlicz Funktion etwas allgemeiner, als es in der Literatur üblich ist. Dadurch erhalten wir ℓ_1^n und ℓ_∞^n als Orlicz Räume, sowie andere Räume, die natürlich auftreten.

Für eine Orlicz Funktion M ist

$$\|x\|_M = \inf \left\{ \rho > 0 \left| \sum_{i=1}^{n} M\left(\left| \frac{x(i)}{\rho} \right| \right) \leq 1 \right. \right\}$$

auf dem $\mathbb{R}^n$ eine Norm. Dies läßt sich leicht überprüfen.

Die Funktion $M^* : [0,\infty) \to [0,\infty]$

$$M^*(s) = \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} (st - M(t))$$

heißt die zu M komplementäre Funktion oder auch duale Funktion.

Lemma 77 *Es sei M eine Orlicz Funktion. Dann ist M^* wieder eine Orlicz Funktion.*

Beweis. Es gilt $M^*(0) = 0$, weil

$$M^*(0) = \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} -M(t) = -M(0) = 0.$$

M^* ist nicht negativ, weil

$$M^*(s) = \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} (st - M(t)) \geq -M(0) = 0.$$

M^* ist konvex, da

$$\begin{aligned}
M^*(\frac{s_1+s_2}{2}) &= \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} \left(\frac{s_1+s_2}{2}t - M(t)\right) \\
&\leq \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} \left(\frac{s_1}{2}t - \frac{1}{2}M(t)\right) + \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} \left(\frac{s_2}{2}t - \frac{1}{2}M(t)\right) \\
&= \frac{1}{2}M^*(s_1) + \frac{1}{2}M^*(s_2)
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass M^* linksseitig stetig ist. Es sei s_n, $n \in \mathbb{N}$, eine wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty} s_n = s_0$. Dann gilt (wir lassen $M^*(s_0) = \infty$ zu)

$$\begin{aligned}
\sup_n M^*(s_n) &= \sup_n \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} (s_n t - M(t)) \\
&= \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} \sup_n (s_n t - M(t)) = \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} (s_0 t - M(t)) = M^*(s_0)
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass M^* weder die 0-Funktion ist, noch die Funktion, die in 0 den Wert 0 annimmt und ansonsten den Wert ∞. Weil M nicht gleich der Funktion ist, die für $t > 0$ gleich ∞ ist, gibt es ein t_0 mit $0 < t_0$ und $M(t_0) < \infty$. Somit

$$M^*(s) = \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} (st - M(t)) \geq st_0 - M(t_0)$$

und $M^*(s) > 0$, falls $s > M(t_0)/t_0$. Deshalb ist M^* nicht gleich der konstanten Funktion 0.

M ist nicht gleich der konstanten Funktion 0. Wir betrachten zunächst den Fall, dass M den Wert ∞ annimmt. Es gibt also ein $t_0 > 0$ mit $M(t_0) = \infty$. Deshalb

$$M^*(s) = \sup_{\{t|M(t)<\infty\}} (st - M(t)) \leq \sup_{0\leq t<t_0} st = st_0$$

Also ist M^* auf $[0,\infty)$ endlich. Nun der Fall, dass M nur endliche Werte annimmt. Es sei t_0 mit $0 < M(t_0) < \infty$. Dann gilt für alle $t \geq t_0$

$$M(t) \geq t\frac{M(t_0)}{t_0}$$

weil $M(0) = 0$ und M konvex ist. Dann folgt

$$\sup_{0\leq t<t_0} (st - M(t)) \leq st_0$$

$$\sup_{t_0\leq t<\infty} (st - M(t)) \leq \sup_{t_0\leq t<\infty} \left(st - t\frac{M(t_0)}{t_0}\right) = \sup_{t_0\leq t<\infty} t\left(s - \frac{M(t_0)}{t_0}\right)$$

Falls also $s \leq \frac{M(t_0)}{t_0}$, dann gilt $M^*(s) < \infty$ und M^* kann nicht die Funktion sein, die für $t > 0$ den Wert ∞ annimmt. $\square$

Beispiel 14 *(i) Es sei $1 < p < \infty$ und $M(t) = \frac{1}{p}t^p$ für $t \geq 0$. Dann ist die komplementäre Funktion*

$$M^*(s) = \tfrac{1}{q}s^q$$

(ii) Die komplementäre Funktion zu $M(t) = t$ ist

$$M^*(s) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s \leq 1 \\ \infty & 1 < s \end{cases}$$

(iii) Es sei $0 < a < \infty$. Dann ist die komplementäre Funktion zu

$$M(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq a \\ \infty & a < t \end{cases}$$

die Funktion $M^*(s) = as$.

Beweis. (i) Wegen $M'(t) = t^{p-1}$ gilt $M'^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p-1}}$ und somit

$$M^*(s) = \int_0^s M'^{-1}(t)dt = \int_0^s t^{\frac{1}{p-1}}dt = \tfrac{1}{q}t^q$$

(ii)

$$M^*(s) = \sup_{0\leq t<\infty}(st - M(t)) = \sup_{0\leq t<\infty}(st - t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s \leq 1 \\ \infty & 1 < s \end{cases}$$

(iii)

$$M^*(s) = \sup_{0\leq t<\infty}(st - M(t)) = \sup_{0\leq t\leq a}(st - M(t)) = \sup_{0\leq t\leq a} st = as$$

$\square$

Es sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ eine wachsende Funktion. Die verallgemeinerte Linksinverse von f ist

$$g(s) = \inf\{t \in [0,\infty) | f(t) > s\}$$

falls es ein t gibt, so dass $f(t) > s$ gilt. Falls es kein solches t gibt, dann setzen wir $g(s) = \infty$.

Lemma 78 *Es sei $M : [0,\infty) \to [0,\infty]$ eine Orlicz Funktion und $f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ mit*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ M'(t) & M(t) < \infty \\ \infty & M(t) = \infty \end{cases}$$

wobei M' die linksseitige Ableitung von M bezeichnet. g sei die verallgemeinerte Linksinverse von f.
(i) f ist wachsend, nicht negativ und auf dem Intervall, auf dem f endliche Werte annimmt, linksseitig stetig. Es gilt für alle $s \in [0,\infty)$

$$M(s) = \int_0^s f(t)dt$$

(ii) g ist wachsend, und nicht negativ.
(iii) $N_M : [0,\infty) \to [0,\infty]$ mit

$$N_M(s) = \int_0^s g(t)dt$$

ist eine Orlicz Funktion.
(iv) Für alle s und t mit $0 \leq s,t < \infty$ gilt genau dann $s < f(t)$, wenn $t > g(s)$ gilt. g ist rechtsseitig stetig. Weiter gilt $s \geq f(t)$, falls $t = g(s)$.
(v) Für alle s und t mit $0 \leq s,t < \infty$ gilt

$$st \leq M(t) + N_M(s)$$

wobei hier Gleichheit gilt, wenn $t = g(s)$.
(vi) $M^* = N_M$

Beweis. (i) Da M konvex ist, ist die linksseitige Ableitung M' wachsend und linksseitig stetig. Wir benötigen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: *Es sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutstetig. Dann ist F' Lebesgue-integrierbar und es gilt für alle $x \in [a,b]$*

$$F(x) - Fa) = \int_a^x F'(t)d\lambda.$$

Wir betrachten das Intervall, auf dem M endliche Werte annimmt. Auf jedem kompakten, echten Teilintervall ist M absolutstetig und wir können den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden. Es gibt zwei Fälle, M ist auf dem Intervall, auf dem M endliche Werte annimmt, unbeschränkt oder M ist dort beschränkt. Falls M unbeschränkt ist, dann ist das Intervall rechts offen und wir sind fertig. Falls M beschränkt ist, dann ist das Intervall abgeschlossen, weil M linksseitig stetig ist. Es sei $[0, s_0]$ dieses Intervall. Dann folgt wiederum mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für alle s mit $s < s_0$

$$M(s) = \int_0^s f(t)dt$$

Außerdem folgt mit dem Satz über die monotone Konvergenz

$$M(s_0) = \lim_{s \to s_0} M(s) = \lim_{s \to s_0} \int_0^s f(t)dt = \int_0^{s_0} f(t)dt$$

(ii) g ist nicht negativ, weil wir das Infimum über nicht negative Zahlen bilden. Falls $s_1 < s_2$, dann

$$g(s_1) = \inf\{t \geq 0 | f(t) > s_1\} \leq \inf\{t \geq 0 | f(t) > s_2\} = g(s_2)$$

Also ist g wachsend.

(iii) Offensichtlich gilt $N_M(0) = 0$ und $N_M(s) \geq 0$, weil g nicht negativ ist. Wir weisen nach, dass N_M konvex ist. Es seien $0 \leq s_1 \leq s_2$.

$$N_M(\frac{s_1 + s_2}{2}) = \int_0^{\frac{s_1+s_2}{2}} g(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{s_1} g(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{s_1+s_2}{2}} g(t)dt + \frac{1}{2}\int_{s_1}^{\frac{s_1+s_2}{2}} g(t)dt$$

Da g wachsend ist, folgt

$$\begin{aligned} N_M(\frac{s_1 + s_2}{2}) &\leq \frac{1}{2}\int_0^{s_1} g(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{s_1+s_2}{2}} g(t)dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{s_1+s_2}{2}}^{s_2} g(t)dt \\ &= \frac{1}{2}N_M(s_1) + \frac{1}{2}N_M(s_2) \end{aligned}$$

N_M ist nicht die Nullfunktion. Wäre dies so, dann wäre bereits g die Nullfunktion. Also gilt für alle $s \geq 0$

$$0 = g(s) = \inf\{t \geq 0 | f(t) > s\}$$

und damit gilt $f(t) = \infty$ für alle $t > 0$. Dann wäre aber M die Funktion, die außerhalb von 0 den Wert ∞ annimmt. Umgekehrt kann N_M auch nicht die Funktion sein, die die außerhalb von 0 den Wert ∞ annimmt. Wir weisen dies nach. Wäre dies so, dann müsste g die Funktion sein, die außerhalb der Null den Wert ∞ annimmt. Also gilt für alle $s > 0$

$$\infty = g(s) = \inf\{t \geq 0 | f(t) > s\}$$

Also muss f bereits die Nullfunktion sein. Dann wäre aber M die Nullfunktion, was wir ausschließen.

(iv) Nach Definition

$$g(s) = \inf\{t \in [0, \infty) | f(t) > s\}$$

falls ein t mit $s < f(t)$ existiert. Da f linkseitig stetig ist, gilt für alle s, dass $\{t \in [0, \infty) | f(t) > s\}$ eine offene Menge ist, also

$$\{t \in [0, \infty) | f(t) > s\} = (g(s), \infty)$$

Hieraus folgt, dass $f(t) > s$ genau dann gilt, wenn $g(s) < t$. Dies bedeutet auch, dass $f(t) \leq s$ genau dann gilt, wenn $g(s) \geq t$. Also

$$\{s|g(s) \geq t\} = \{s|f(t) \leq s\}$$

Die Menge $\{s|f(t) \leq s\} = [f(t), \infty)$ ist abgeschlossen und damit auch $\{s|g(s) \geq t\}$. Also ist die Menge $\{s|g(s) < t\}$ offen. Deshalb ist g rechtsseitig stetig.

Es gilt $f(t) \leq s$, falls $g(s) = t$. Dies gilt, weil $f(t) \leq s$ genau dann gilt, wenn $g(s) \geq t$.

(v) Falls $M(s) = \infty$ oder $N_M(t) = \infty$, dann ist nichts nachzuweisen. Wir können also annehmen, dass beide Werte endlich sind.

Nach (iv) gilt genau dann $u < f(v)$, wenn $g(u) < v$. Somit sind die beiden Mengen

$$\{(u,v) \in [0,s] \times [0,t] | v \leq g(u)\} \qquad \{(u,v) \in [0,s] \times [0,t] | u < f(v)\}$$

disjunkt und es gilt

$$\begin{aligned}[0,s] \times [0,t] &= \{(u,v) \in [0,s] \times [0,t] | v \leq g(u)\} \\ &\quad \cup \{(u,v) \in [0,s] \times [0,t] | u < f(v)\}.\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned} st &= \int_0^s \int_0^t dvdu = \int_0^s \int_0^{\min\{t,g(u)\}} dvdu + \int_0^t \int_0^{\min\{s,f(v)\}} dudv \\ &\leq \int_0^s \int_0^{g(u)} dvdu + \int_0^t \int_0^{f(v)} dudv \\ &= \int_0^s g(u)du + \int_0^s f(v)dv = M(s) + N_M(t) \end{aligned}$$

Wir behandeln nun den Fall der Gleichheit. Gleichheit gilt genau dann, wenn für alle u mit $0 \leq u \leq s$ die Ungleichung $g(u) \leq t$ gilt und für alle v mit $0 \leq v \leq t$ die Ungleichung $f(v) \leq s$.

Wir nehmen an, dass $t = g(s)$. Dann gilt nach (iv) die Ungleichung $f(t) \leq s$. Deshalb gilt für alle u mit $0 \leq u \leq s$, dass $g(u) \leq g(s) = t$, und für alle $0 \leq v \leq t$, dass $f(v) \leq f(t) \leq s$.

Ebenso verfahren wir im Fall $f(t) = s$. Nach (iv) muss dann $g(s)t$ gelten

(vi) folgt aus (v). Wegen $st \leq M(t) + N_M(s)$ gilt

$$M^*(s) = \sup_{0 \leq t < \infty} (st - M(t)) \leq N_M(s)$$

Andererseits gilt nach (v) die Gleichung $sg(s) = M(g(s)) + N_M(s)$. Deshalb

$$M^*(s) = \sup_{0 \leq t < \infty} (st - M(t)) \geq sg(s) - M(g(s)) = N_M(s)$$

□

Lemma 79 *Es sei M eine Orlicz Funktion. Dann gilt $M^{**}=M$.*

Beweis. Nach Definition

$$M^{**}(s)=\sup_{\{t|M(t)<\infty\}}(st-M^{*}(t))$$

Falls $M(s)=\infty$, dann gilt trivialerweise $M^{**}(s)\leq M(s)$. Wir nehmen nun an, dass $M(s)<\infty$. Wegen $st\leq M(s)+M^{*}(t)$ gilt $st-M^{*}(t)\leq M(s)$ und somit

$$M^{**}(s)\leq M(s).$$

Nun die Umkehrung. Für jedes s mit $0\leq s<\infty$ und $g(s)<\infty$ gilt

$$sg(s)=M(g(s))+M^{*}(s)$$

Es folgt

$$M(g(s))=sg(s)-M^{*}(s)\leq\sup_{0\leq t<\infty}(st-M^{*}(t))=M^{**}(g(s))$$

Damit sind M und M^{*} in allen Punkten identisch, die im Bild von g liegen. Es sei nun u_0 ein Element, das nicht im Bild liegt. Es seien u_1 und u_2 das Supremum über alle u, die im Bild von g liegen und kleiner als u_0 sind, und u_2 das Infimum über alle u, die im Bild von g liegen und die größer als u_0 sind (vorausgesetzt sie existieren).

Falls u_1 und u_2 existieren, dann gilt für alle $\lambda\in[0,1]$

$$M^{**}(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=\lambda M^{**}(u_1)+(1-\lambda)M^{**}(u_2) \tag{2.16}$$

Wir weisen dies nach. Wegen der Konvexität von M^{**} gilt

$$M^{**}(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\leq\lambda M^{**}(u_1)+(1-\lambda)M^{**}(u_2)$$

Nun die inverse Ungleichung

$$\begin{aligned}
&M^{**}(\lambda g(s_1)+(1-\lambda)g(s_2))\\
&=\sup_t t(\lambda g(s_1)+(1-\lambda)g(s_2))-M^{*}(t)\\
&=\sup_t \lambda(tg(s_1)-M^{*}(t))+(1-\lambda)(tg(s_2)-M^{*}(t))\\
&\geq\lambda(s_1g(s_1)-M^{*}(s_1))+(1-\lambda)(s_1g(s_2)-M^{*}(s_1))\\
&=\lambda M^{**}(g(s_1))+(1-\lambda)M^{**}(g(s_2))+(1-\lambda)((s_1-s_2)g(s_2)-M^{*}(s_1)+M^{*}(s_2))
\end{aligned}$$

Wir können $|s_1-s_2|$ beliebig klein wählen. Auf Grund der Konvexität von M gilt

$$M(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\leq\lambda M(u_1)+(1-\lambda)M(u_2)$$

Da wir bereits gezeigt haben, dass $M^{**}\leq M$ gilt, folgt nun die Gleichheit von M und M^{**} auf dem Intervall. Nun der Fall, dass u_1 nicht existiert. $\square$

Lemma 80 *Der Raum ℓ_M^n ist der $\mathbb{R}^n$ mit der Norm $\| \, \|_M$. Die Norm des Dualraums ℓ_M^{n*} werde mit $\| \, \|_M^*$ bezeichnet. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\|x\|_{M^*} \leq \|x\|_M^* \leq 2\|x\|_{M^*}$$

Beweis.

$$\sum_{i=1}^n x(i)y(i) \leq \sum_{i=1}^n (M(|x(i)|) + M^*(|y(i)|))$$

$$\sup_{\sum M(|x(i)|)\leq 1} \sum_{i=1}^n x(i)y(i) \leq \sup_{\sum M(|x(i)|)\leq 1} \sum_{i=1}^n M(|x(i)|)+M^*(|y(i)|) \leq 1+\sum_{i=1}^n M^*(|y(i)|)$$

Somit

$$\|y\|_M^* \leq 1 + \sum_{i=1}^n M^*(|y(i)|)$$

und damit

$$\|y\|_M^* \leq 2\|y\|_{M^*}$$

□

2.11 Khintchine-Ungleichung

Die Rademacher-Funktionen $r_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$, sind durch

$$r_n(t) = \operatorname{sgn} \sin 2^n \pi t$$

definiert. Sie nehmen nur die Werte -1 und 1 an. Die Rademacher-Funktionen sind im wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne unabhängige Zufallsveränderliche.

Satz 15 *(Khintchine-Ungleichung) Zu jedem p mit $1 \le p < \infty$ existieren positive Konstanten a_p und b_p, so dass für alle endlichen Folgen reeller Zahlen x_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ die Ungleichungen*

$$a_p \left(\sum_{i=0}^{m} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^{m} x_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \le b_p \left(\sum_{i=0}^{m} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Für die optimalen Konstanten gilt $a_p \ge \frac{1}{8}$ für $1 \le p \le 2$, $a_p = 1$ für $2 \le p < \infty$, $b_p = 1$ für $1 \le p \le 2$ und $b_p \le \sqrt{2p+4}$ für $2 \le p < \infty$.

Die optimalen Konstanten in Satz 15 lassen sich genau bestimmen. Von Young wurden einige Konstanten bestimmt [You]. Szarek [Sza2] zeigte, dass $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Haagerup [Haa] berechnete die optimalen Konstanten für alle p.

(2.17)

$$a_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} & 0 < p \le p_0 \\ 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{p}} & p_0 < p < 2 \\ 1 & 2 \le p < \infty \end{cases} \qquad b_p = \begin{cases} 1 & 0 < p \le 2 \\ 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{p}} & 2 < p < \infty \end{cases}$$

Es gilt

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^{m} x_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \left| \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i x_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Der letztere Ausdruck lässt die folgende Interpretation zu. Man wirft eine Münze m-mal. Zahl bekommt den Wert 1 und Kopf den Wert -1. Der Mittelwert oder Erwartungswert ist 0, d.h. man erwartet genauso oft Kopf wie Zahl. Es ist jedoch nicht immer so, dass man genauso oft Kopf und Zahl wirft, wenn man eine Münze m-mal wirft. Es ist z.B. möglich, dass jedesmal Kopf geworfen wird. Es stellt sich also die Frage, wie sehr typischerweise beim m-maligen Werfen einer Münze das Ergebnis davon abweicht, dass genauso oft Kopf wie Zahl geworfen werden. Die mittlere Abweichung ist

$$\sum_{\epsilon_i = \pm 1} \left| \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i x_i \right|$$

Nach der Khintchine-Ungleichung ist dies von der Größenordnung $\sqrt{m}$.

Lemma 81 *Es seien $k_1, \dots, k_\ell$ natürliche Zahlen. Es gilt genau dann*

$$\int_0^1 r_{i_1}^{k_1}(t) \cdots r_{i_\ell}^{k_\ell}(t)dt = 0,$$

falls eine der Zahlen $k_1, \dots, k_\ell$ ungerade ist.

Falls alle Zahlen gerade sind, dann ist das Integral gleich 1.

Beweis. $\square$

Lemma 82 *Für alle $k, k_1, k_2, \dots, k_m = 0, 1, 2, \dots$*

$$\frac{(2k)!}{(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \leq 2^{2k} k! \frac{k!}{k_1! \cdots k_m!}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{(2k)!}{k!} &= \frac{(2k)(2k-1)(2k-2)\cdots 2 \cdot 1}{k(k-1)\cdots 2 \cdot 1} \\ &= 2^k (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1 \\ &= 2^k \prod_{j=0}^{k-1}(2k-(2j+1)) \\ &\leq 2^k \prod_{j=0}^{k-1}(2k-2j) = 2^{2k} \prod_{j=0}^{k-1}(k-j) = 2^{2k} k! \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{(2k)!}{(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \leq 2^{2k} k! \frac{k!}{(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \leq 2^{2k} k! \frac{k!}{k_1! \cdots k_m!}$$

$\square$

Beweis. Mit Satz 67 folgt, dass für die optimalen Konstanten a_p die Abschätzung $a_p \leq a_q$ für $p \leq q$ gilt und $b_p \leq b_q$ für $p \leq q$.

Wir zeigen zuerst, dass die Ungleichungen für $a_2 = b_2 = 1$ gelten. Wegen Lemma 81 gilt für alle i, j mit $i \neq j$

$$\int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt = 0.$$

Hiermit folgt sofort

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i(t) \right|^2 dt = \sum_{i,j=0}^m x_i x_j \int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt = \sum_{i=0}^m |x_i|^2.$$

Mit Satz 67 folgt, dass für $p \leq 2$

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und für $p \geq 2$

$$\left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

gilt.

Es sei p eine positive, gerade, ganze Zahl. Die Multinomialentwicklung liefert

$$\left| \sum_{i=0}^m x_i r_i \right|^p = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m = 0 \\ \sum k_i = p}}^{p} \frac{p!}{k_0! \cdots k_m!} x_0^{k_0} \cdots x_m^{k_m} r_0^{k_0} \cdots r_m^{k_m}$$

Hiermit und mit Lemma 81 folgt

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i \right|^p dt = \sum_{\substack{k_0, \ldots, k_m = 0 \\ \sum k_i = p \\ k_i \text{ gerade}}}^{p} \frac{p!}{k_0! \cdots k_m!} x_1^{k_0} \cdots x_m^{k_m}$$

Wir setzen nun $p = 2k$

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i \right|^{2k} dt = \sum_{\substack{k_0, \ldots, k_m = 0 \\ \sum k_i = k}}^{k} \frac{(2k)!}{(2k_0)! \cdots (2k_m)!} x_1^{2k_0} \cdots x_m^{2k_m}$$

Weiter gilt

$$\left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2 \right)^k = \sum_{\substack{k_0, \ldots, k_m = 0 \\ \sum k_i = k}}^{k} \frac{k!}{k_0! \cdots k_m!} x_1^{2k_0} \cdots x_m^{2k_m}$$

Mit Lemma 82 folgt

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i \right|^p dt \leq 2^{2k} k! \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2 \right)^k \leq 2^p \left(\frac{p}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

und somit

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{i=0}^m x_i r_i \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt{2p} \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Damit haben wir auch gezeigt, dass $b_p \leq \sqrt{2p}$. Falls $p \geq 2$, aber keine ganze, gerade Zahl ist, dann gibt es eine ganze, gerade Zahl r mit $2 \leq r \leq p \leq r+2$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^{r+2} dt\right)^{\frac{1}{r+2}} \\
&\leq \sqrt{2(r+2)} \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2(p+2)} \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $a_1 = b_4^{-2}$ die Gleichung erfüllt. Da 4 eine ganze, gerade Zahl ist, gilt $b_4 \leq \sqrt{8}$ und somit $a_1 \geq \frac{1}{8}$. Mit Hölders Ungleichung (Lemma 62) folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^m |x_i|^2 &= \int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^2 dt \\
&= \int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^{\frac{2}{3}} \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^{\frac{4}{3}} dt \\
&\leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right| dt\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right| dt\right)^{\frac{2}{3}} b_4^{\frac{4}{3}} \left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

und somit

$$\left(\sum_{i=0}^m |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq b_4^2 \int_0^1 \left|\sum_{i=0}^m x_i r_i\right| dt$$

□

Wir geben noch eine weiteren Beweis der Khintchine Ungleichung an. Dieser benutzt, dass die Rademacher Funktionen stochastisch unabhängig sind.

Beweis. Es sei $p \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|t|^p < p!(1 + |t|^p/p!) \leq p! e^{|t|}$. Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right|^p dt &\leq p! \int_0^1 \exp\left(\left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right|\right) dt \\
&= p! \int_{\sum_{i=1}^n a_i r_i \geq 0} \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i r_i\right) dt + p! \int_{\sum_{i=1}^n a_i r_i \leq 0} \exp\left(-\sum_{i=1}^n a_i r_i\right) dt \\
&\leq p! \int_0^1 \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i r_i\right) dt + p! \int_0^1 \exp\left(-\sum_{i=1}^n a_i r_i\right) dt \\
&= p! \int_0^1 \prod_{i=1}^n \exp(a_i r_i)\, dt + p! \int_0^1 \prod_{i=1}^n \exp(-a_i r_i)\, dt
\end{aligned}$$

Mit der stochastischen Unabhängigkeit der Rademacher Funktionen folgt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right|^p dt &\leq p! \prod_{i=1}^n \int_0^1 \exp\left(a_i r_i\right) dt + p! \prod_{i=1}^n \int_0^1 \exp\left(-a_i r_i\right) dt \\ &= 2p! \prod_{i=1}^n \frac{e^{a_i} + e^{-a_i}}{2}\end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Abschätzung $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

$$\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right|^p dt \leq 2p! \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{a_i^2}{2}\right) = 2p! \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{2}\right)$$

□

2.12 Satz von Stone-Weierstraß

Der Satz von Weierstraß besagt, dass man jede stetige, reellwertige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig durch Polynome approximieren kann, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ und zu jeder stetigen Funktion f gibt es ein Polynom p, so dass für alle $x \in [a, b]$

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

gilt.

Für zwei reellwertige Funktionen f und g definieren wir

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} \qquad \min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Lemma 83 *Es sei K ein kompakter, topologischer Raum, der mindestens zwei Elemente enthält. Es sei M eine Teilmenge von $C(K, \mathbb{R})$, so dass*
(i) Für alle $f, g \in M$ gilt $\max\{f, g\} \in M$ und $\min\{f, g\} \in M$.
(ii) Für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ und alle $s, t \in \mathbb{R}$ existiert ein $f \in M$ mit $f(x) = s$ und $f(y) = t$.
Dann ist M in $C(K, \mathbb{R})$ bzgl. der Normtopologie dicht.

Beweis. Es seien $f \in C(K, \mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Es sei x fest gewählt. Nach Annahme existiert zu allen $x, y \in K$ mit $x \neq y$ eine Funktion $g_y \in M$ mit $g_y(x) = f(x)$ und $f(y) = g_y(y)$. Weiter sei

$$O_y = \{z | g_y(z) > f(z) - \epsilon\}$$

Für alle $y \in K$ ist O_y eine offene Menge und $x, y \in O_y$. Somit ist O_y, $y \in K$ und $y \neq x$, eine offene Überdeckung von K. Wegen der Kompaktheit von K gibt es eine endliche Teilüberdeckung.

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} O_{y_i}$$

wobei für alle $i = 1, \ldots, n$ die Relation $x \neq y_i$ gilt. Nun setzen wir

$$h_x = \max\{g_{y_1}, \ldots, g_{y_n}\}$$

Durch Induktion erhalten wir $h_x \in M$. Damit erhalten wir

$$h_x(x) = f(x) \text{ und für alle } z \in K : h_x(z) > f(z) - \epsilon$$

Wir setzen nun

$$U_x = \{z \in K | h_x(z) < f(z) + \epsilon\}$$

Damit ist U_x, $x \in K$, eine offene Überdeckung von K und besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

$$K = \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}$$

Wir setzen nun

$$h = \min\{h_{x_1}, \ldots, h_{x_m}\}$$

Damit gilt $f - \epsilon < h < f + \epsilon$ und somit $\|f - h\| < \epsilon$. $\square$

Satz 16 *Es sei K ein kompakter, topologischer Raum und X ein Teilraum von $C(K, \mathbb{R})$, so dass*
(i) X enthält alle konstanten Funktionen.
(ii) Die Funktionen von X trennen die Punkte von K, d.h. für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ gibt es eine Funktion $f \in X$ mit $f(x) \neq f(y)$.
(iii) Für alle $f, g \in X$ gilt $\max\{f, g\} \in X$ und $\min\{f, g\} \in X$.
Dann ist X in $C(K, \mathbb{R})$ bzgl. der Normtopologie dicht.

Beweis. Falls K nur ein Element enthält, ist das Ergebnis klar. Wir nehmen nun an, dass K mindestens zwei Elemente enthält. Es reicht nun, die Voraussetzungen von Lemma 83 nachzuprüfen.

Falls $x, y \in K$ mit $x \neq y$, dann gibt es eine Funktion $f \in X$ mit $f(x) \neq f(y)$. Da die konstanten Funktionen in X liegen, so sind für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Funktionen $\alpha f + \beta$ Elemente von X. Es gibt zu allen $s, t \in \mathbb{R}$ zwei Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha f(x) + \beta = s$ und $\alpha f(y) + \beta = t$, nämlich

$$\alpha = \frac{s - t}{f(x) - f(y)} \qquad \beta = s - f(x)\frac{s - t}{f(x) - f(y)}$$

Es gilt $\alpha f + \beta \in X$, weil die konstanten Funktionen in X sind und X ein Vektorraum ist. $\square$

Es sei K eine kompakter, topologischer Raum und $\mathcal{A}$ sei ein Teilraum von $C(K)$. Wir sagen, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist, wenn aus $f, g \in \mathcal{A}$ die Relation $f \cdot g \in \mathcal{A}$ folgt.

Wir bemerken, dass ein Teilraum $\mathcal{A}$ genau dann eine Algebra ist, wenn für alle $f \in \mathcal{A}$ die Relation $f^2 \in \mathcal{A}$ gilt. Dies folgt, weil

$$f \cdot g = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$$

Lemma 84 *(Dini) Es sei K ein kompakter, topologischer Raum und f_n, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge in $C(K, \mathbb{R})$, die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Dann konvergiert die Folge gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$. Wir setzen

$$O_n = \{x \in K | f_n(x) > f(x) - \epsilon\}$$

Dann ist O_n eine offene Überdeckung von K, weil f_n punktweise gegen f konvergieren. Weiter gilt $O_n \subseteq O_{n+1}$, weil f_n monoton wachsend sind. Also gibt es ein N mit $O_N = K$. Somit gilt für alle $x \in K$, dass $f(x) - \epsilon < f_N(x) \leq f(x)$. Weil f_n strikt wachsend sind, gilt für alle $n \geq N$, dass $f(x) - \epsilon < f_n(x) \leq f(x)$. $\square$

Lemma 85 *Es gibt eine Folge von Polynomen p_n, $n \in \mathbb{N}$, die auf $[-1,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $|x|$ konvergiert.*

Beweis. Wir setzen $p_0 = 0$ und

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_n^2(x))$$

p_n ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen die Funktion $|x|$. Mit dem Lemma von Dini (Lemma 84) folgt, dass die Folge gleichmäßig konvergiert.

Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [-1,1]$ die Ungleichung $0 \leq p_n(x) \leq |x|$ gilt. Wir benutzen Induktion über n. $p_0 = 0$ erfüllt offenbar die Ungleichung. Wir nehmen nun an, dass wir die Ungleichung für n bewiesen haben. Dann

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_n^2(x)) \geq p_n(x)$$

und

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) \qquad &= p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_n^2(x)) \\ &= |x| - (|x| - p_n(x)) + \frac{1}{2}(|x| + p_n(x))(|x| - p_n(x)) \\ &= |x| - (|x| - p_n(x)) \left\{ 1 - \frac{1}{2}(|x| + p_n(x)) \right\} \leq |x| \end{aligned}$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass die Folge monoton wachsend ist und $p_n \leq p_{n+1}$ gilt.

Wir zeigen nun, dass $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = |x|$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} p_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - \lim_{n\to\infty} p_n^2(x))$$

Es folgt

$$x^2 = \lim_{n\to\infty} p_n^2(x)$$

Da $p_n \geq 0$, folgt $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = |x|$. $\square$

Satz 17 *[Stone-Weierstraß] Es sei K ein kompakter, topologischer Raum und $\mathcal{A}$ eine Algebra in dem reellen Raum $C(K)$. $\mathcal{A}$ enthalte die konstanten Funktionen und $\mathcal{A}$ sei punktetrennend, d.h. zu jedem x und y mit $x \neq y$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann liegt $\mathcal{A}$ dicht in $C(K)$.*

Falls $C(K)$ ein komplexer Vektorraum ist, dann muss man noch zusätzlich fordern, dass $\mathcal{A}$ selbstadjungiert ist, d.h. mit $f \in A$ gilt auch $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

Beweis. Die Algebra $\mathcal{A}$ enthält alle konstanten Funktionen und sie trennt auch die Punkte von K. Damit gilt dies auch für den Abschluss $\bar{\mathcal{A}}$ der Algebra und $\bar{\mathcal{A}}$ ist wiederum eine Algebra. Dies gilt, weil

$$\|f_n g_n - fg\| \leq \|f_n g_n - f g_n\| + \|f g_n - fg\| \leq \|g_n\| \|f_n - f\| + \|f\| \|g_n - g\|$$

Nach Satz 16 reicht es nun nachzuweisen, dass $\max\{f,g\} \in \bar{\mathcal{A}}$ und $\min\{f,g\} \in \bar{\mathcal{A}}$, falls $f,g \in \bar{\mathcal{A}}$ gilt.

Nach Lemma 85 gibt es eine Folge von Polynomen p_n, die auf $[-1,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $|x|$ konvergiert. Damit konvergiert die Folge $p_n(\frac{f}{\|f\|})$ gleichmäßig gegen die Funktion $\frac{|f|}{\|f\|}$. Die Funktionen $p_n(\frac{f}{\|f\|})$ sind Elemente von $\bar{\mathcal{A}}$, weil $\bar{\mathcal{A}}$ eine Algebra ist. Weiter folgt, dass $\|f\|p_n(\frac{f}{\|f\|})$ gleichmäßig gegen $|f|$ konvergiert. Somit ist auch $|f|$ in $\bar{\mathcal{A}}$ enthalten.

Wegen

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \qquad \min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

sind also auch $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ in $\bar{\mathcal{A}}$ enthalten wenn $f,g \in \bar{\mathcal{A}}$. $\Box$

Korollar 3 *Es sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann sind die Polynome dicht in dem Raum $C(K,\mathbb{R})$.*

Beweis. Die Menge der Polynome ist offensichtlich eine Algebra. Die Konstanten gehören zum Raum der Polynome. Die Polynome trennen die Punkte von K. Dazu reicht es, die Polynome der Form $x_i + c$, $c \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$, zu betrachten. $\Box$

Chapter 3

Lineare Operatoren

3.1 Lineare Operatoren

Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. T heißt beschränkt, falls es ein c mit $c > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$

$$\|T(x)\|_Y \le c\|x\|_X$$

gilt. Das Infimum über alle solche c bezeichnen wir als die Norm von T

$$\|T\| = \inf\{c \mid \forall x \in X : \|T(x)\|_Y \le c\|x\|_X\} \tag{3.1}$$

Lemma 86 *(i) Für alle $x \in X$ gilt*

$$\|T(x)\|_Y \le \|T\| \ \|x\|_X$$

(ii)

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y \mid \ \|x\|_X \le 1\}$$

(iii)

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y \mid \ \|x\|_X = 1\}$$

(iv)

$$\|T\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

Beweis. (i) Aus der Definition (3.1) folgt

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in X : \|T(x)\|_Y \le (\|T\| + \epsilon)\|x\|_X.$$

Es folgt sofort

$$\forall x \in X : \|T(x)\|_Y \le \|T\| \ \|x\|_X.$$

(ii) Aus (i) folgt

$$\sup\{\|T(x)\|_Y \mid \ \|x\|_X \le 1\} \le \|T\|.$$

Umgekehrt gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $x \in X$, so dass

$$\|T(x)\|_Y \geq (\|T\| - \epsilon)\|x\|_X.$$

Hieraus folgt

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \geq \|T\| - \epsilon.$$

Damit folgt für alle $\epsilon > 0$

$$\sup\{\|T(x)\|_Y |\ \|x\|_X \leq 1\} \geq \|T\| - \epsilon.$$

□

Mit $L(X,Y)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen, beschränkten Operatoren von X nach Y.

Lemma 87 $L(X,Y)$ *ist ein Vektorraum und*

$$\|T\| = \inf\{c \ |\forall x \in X : \|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X\}$$

ist eine Norm. Sie wird Operatornorm genannt.

Beweis. Falls $\|T\| = 0$, dann gilt

$$\sup_{\|x\|=1} \|T\| = 0.$$

Also gilt für alle x mit $\|x\| = 1$, dass $Tx = 0$. Hieraus folgt für alle $x \in X$, dass $Tx = 0$. Also $T = 0$.

Weiter gilt

$$\|tT\| = \sup_{\|x\|=1} \|tT(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |t|\|T(x)\| = |t| \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = |t|\|T\|.$$

Wir zeigen, dass die Dreiecksungleichung gilt.

$$\begin{aligned}
\|T+S\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|(T+S)(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)+S(x)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} (\|T(x)\| + \|S(x)\|) \\
&\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| + \sup_{\|x\|\leq 1} \|S(x)\| = \|T\| + \|S\|
\end{aligned}$$

□

Lemma 88 X *und* Y *seien normierte Räume und* $T : X \to Y$ *ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:*
(i) T *ist stetig.*
(ii) T *ist stetig in* 0.
(iii) T *ist beschränkt.*

Beweis. Dass (ii) aus (i) folgt, ist trivial. Wir zeigen, dass (iii) aus (ii) folgt. Da T stetig in 0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X < \delta$ gilt, dass $\|T(x)\| < 1$.

$$\begin{aligned}\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y | \; \|x\|_X \leq 1\} \quad &= \frac{1}{\delta} \sup\{\|T(\delta x)\|_Y | \; \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \frac{1}{\delta} \sup\{\|T(y)\|_Y | \; \|y\|_X \leq \delta\} \leq \frac{1}{\delta}\end{aligned}$$

Aus (iii) folgt (i): Die Beschränktheit von T

$$\forall x \in X : \|T(x)\|_Y \leq \|T\| \; \|x\|_X$$

impliziert sofort

$$\forall x, y \in X : \|T(x-y)\|_Y \leq \|T\| \; \|x-y\|_X.$$

□

Lemma 89 *Falls X ein normierter Raum und Y ein Banachraum ist, dann ist $L(X, Y)$ ein Banachraum.*

Beweis. Es sei T_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in $L(X, Y)$. Dann gilt für alle $x \in X$, dass $T_n x$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge ist. Dies folgt sofort aus

$$\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \; \|x\|_X$$

Da Y ein Banachraum ist, konvergiert $T_n x$, $n \in \mathbb{N}$, für alle $x \in X$. Wir definieren einen Operator T durch

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$

Wir prüfen nach, dass T linear ist.

$$\begin{aligned}T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) \quad &= \lim_{n\to\infty} (T_n(x) + T_n(y)) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = T(x) + T(y)\end{aligned}$$

$$T(tx) = \lim_{n\to\infty} T_n(tx) = t \lim_{n\to\infty} T_n(x) = tT(x)$$

Wir prüfen nach, dass T beschränkt ist.

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\| \leq 1} \| \lim_{n\to\infty} T_n(x)\|_Y$$

Mit Lemma 51

$$\begin{aligned}\|T\| \quad &= \sup_{\|x\|\leq 1} \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\|_Y = \sup_{\|x\|\leq 1} \liminf_{n\to\infty} \|T_n(x)\|_Y \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T_n(x)\|_Y = \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|T_n\|\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil T_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in $L(X,Y)$ ist und damit $\|T_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ ist. Wir zeigen nun, dass die Folge T_n, $n \in \mathbb{N}$, in $L(X,Y)$ gegen T konvergiert.

$$\begin{aligned}
\|T - T_n\| &= \sup_{\|x\|\le 1} \|T_n(x) - T(x)\|_Y \\
&= \sup_{\|x\|\le 1} \|T_n(x) - \lim_{k\to\infty} T_k(x)\|_Y \\
&= \sup_{\|x\|\le 1} \|\lim_{k\to\infty} (T_n(x) - T_k(x))\|_Y \\
&= \sup_{\|x\|\le 1} \lim_{k\to\infty} \|T_n(x) - T_k(x)\|_Y \\
&= \sup_{\|x\|\le 1} \liminf_{k\to\infty} \|T_n(x) - T_k(x)\|_Y \\
&\le \liminf_{k\to\infty} \sup_{\|x\|\le 1} \|T_n(x) - T_k(x)\|_Y \\
&= \liminf_{k\to\infty} \|T_n - T_k\|
\end{aligned}$$

□

Lemma 90 *Es seien X, Y und Z normierte Räume und $T : X \to Y$ und $S : Y \to Z$ beschränkte, lineare Operatoren. Dann gilt*

$$\|S \circ T\| \le \|S\|\|T\|$$

Beweis.

$$\|S \circ T\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|S(T(x))\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|S\|\|T(x)\| \le \|S\|\|T\|$$

□

Zwei normierte Räume X und Y heißen isomorph, wenn es eine Bijektion $I : X \to Y$ gibt, so dass I und I^{-1} beschränkt sind.

Eine lineare Abbildung $P : X \to X$ heißt Projektion, falls $P^2 = P$ gilt. Eine Projektion ist auf dem Bild $P(X)$ die identische Abbildung, d.h. für alle $x \in P(X)$ gilt $P(x) = x$. Dies sieht man leicht ein: Es sei $x \in P(X)$. Dann gibt es ein $y \in X$ mit $x = P(y)$ und somit gilt

$$P(x) = P^2(y) = P(y) = x$$

Wir sagen, dass ein Teilraum Y von X komplementiert ist, wenn Y das Bild einer stetigen Projektion ist.

Ein Vektorraum X ist die direkte Summe von zwei Teilräumen Y und Z, wenn zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ und genau ein $z \in Z$ mit $x = y + z$ existieren.

Dies kann man auch so formulieren: Es gibt zwei Teilräume Y und Z mit $Y \cap Z = \{0\}$ und

$$X = Y + Z = \{y + z | y \in Y, z \in Z\}$$

Wenn es sich um topologische Vektorräume handelt, dann statten wir die direkte Summe mit der Produkttopologie aus, die im Fall normierter Räume von der Norm $\|y\|_Y + \|z\|_Z$ erzeugt wird.

Wir sagen dann, dass X die topologische direkte Summe von Y und Z ist.

Lemma 91 *Es sei X ein Banachraum und Y ein Teilraum von X. Y ist genau dann komplementiert in X, wenn es einen weiteren Teilraum Z von X gibt, so dass X die direkte Summe von Y und Z ist und so dass die Norm $\| \ \|_Y + \| \ \|_Z$ äquivalent zu der von X ist, d.h. es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $y \in Y$ und alle $z \in Z$*

$$\|y + z\| \leq \|y\| + \|z\| \leq c\|y + z\|$$

Beweis. Es sei Y das Bild der stetigen Projektion P. Es sei $I : X \to X$ die identische Abbildung. Dann ist $I - P$ eine stetige Projektion

$$(I - P)^2 = I^2 - PI - IP + P^2 = I - P.$$

Die Norm von $I - P$ lässt sich einfach abschätzen.

$$\|I - P\| \leq \|I\| + \|P\| = 1 + \|P\|$$

Wir wählen Z als das Bild von $I - P$. Dann ist X die direkte Summe von Y und Z. Zu jedem $x \in X$ wählen wir $y = P(x)$ und $z = (I - P)x$ und es gilt $x = Px + (I - P)x = y + z$. Die Darstellungen sind eindeutig, weil aus $P(v) = (I - P)w$ folgt, dass $P(v + w) = w$. Somit gilt $w \in Y$ und weiter $P(v) = 0$.

Für alle $y \in Y$ und $z \in Z$ gilt $\|y\| = \|P(y + z)\| \leq \|P\|\|y + z\|$ und $\|z\| = \|(I - P)(y + z)\| \leq \|I - P\|\|y + z\|$. Somit gilt

$$\|y\| + \|z\| \leq (\|P\| + \|I - P\|)\|y + z\|$$

Wir zeigen nun die Umkehrung. Es sei X die topologische direkte Summe von Y und Z. Wir setzen dann $P : X \to X$

$$P(y + z) = y$$

Dann gilt

$$\|P\| = \sup_{\|y+z\| \leq 1} \|P(y + z)\| = \sup_{\|y+z\| \leq 1} \|y\| \leq \sup_{\|y\|+\|z\| \leq c} \|y\| \leq c$$

□

Den Raum Z nennt man auch Komplementärraum zu Y.

Es sei X ein Vektorraum und Y ein Teilraum von X. Wir sagen, dass x und z äquivalent sind, wenn $x - z$ ein Element von Y ist. Wir bezeichnen den Raum aller Äquivalenzklassen als Quotientenraum X/Y. Die Abbildung Q, die x auf ihre Äquivalenzklasse abbildet heißt Quotientenabbildung.

Falls X ein normierter Raum ist und Y ein abgeschlossener Teilraum von X ist, dann ist

$$\|[x]\|_{X/Y} = \inf\{\|z\|_X | z \sim x\} = \inf\{\|x+y\|_X | y \in Y\} = \inf\{\|x-y\|_X | y \in Y\}$$

eine Norm auf X/Y.

Lemma 92 *Es sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Dann gelten*
(i) $\|[x]\|_{X/Y} = \inf\{\|z\|_X | z \sim x\} = \inf\{\|x+y\|_X | y \in Y\}$ ist eine Norm auf X/Y.
(ii) $\forall \epsilon > 0 \forall x \in X \exists y \in Y : \|[x]\| + \epsilon \geq \|x+y\|$
(iii) Die Abbildung $Q : X \to X/Y$ mit $Q(x) = [x]$ hat die Norm 1.
(iv) Falls X vollständig ist, so ist auch X/Y vollständig.

Beweis. (i) Da Y abgeschlossen ist, gilt für alle $x \notin Y$

$$\|[x]\|_{X/Y} > 0$$

Es folgt, dass genau dann $\|[x]\| = 0$ gilt, wenn $[x] = 0$. Wir weisen die Dreiecksungleichung nach.

$$\begin{aligned}
\|[x]+[y]\| &= \|[x+y]\| \\
&= \inf\{\|x+y+z\|_X | z \in Y\} \\
&= \inf\{\|x+y+z+w\|_X | z,w \in Y\} \\
&\leq \inf\{\|x+z\|_X + \|y+w\|_X | z,w \in Y\} \\
&= \inf\{\|x+z\|_X | z,w \in Y\} + \inf\{\|y+w\|_X | z,w \in Y\} \\
&= \|[x]\| + \|[y]\|
\end{aligned}$$

(ii) folgt aus der Eigenschaft des Infimums.

(iii) Es gilt

$$\|Q\| = \sup_{\|x\|=1} \inf\{\|x+y\|_X | y \in Y\}$$

Man sieht sofort, dass $\|Q\| \leq 1$. Wir weisen nun die umgekehrte Ungleichung nach. Es sei $x \in X$ mit $\|x\| = 1$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $y \in Y$ mit $\|[x]\| \geq \|x-y\|_X - \epsilon$. Es folgt

$$\|Q\| \geq \frac{\|[x-y]\|_{X/Y}}{\|x-y\|_X} = \frac{\|[x]\|_{X/Y}}{\|x-y\|_X} \geq \frac{\|[x]\|_{X/Y}}{\|[x]\|_{X/Y}+\epsilon}$$

(iv) Nach Lemma 52 reicht es zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty}[x_n]$ in X/Y konvergiert, falls $\sum_{n=1}^{\infty}\|[x_n]\| < \infty$. Wir können annehmen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\|x_n\| \leq \|[x_n]\| + \frac{1}{2^n}$ gilt. Es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\|[x_n]\| < \infty$$

Da X vollständig ist, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Damit folgt

$$\left\| \left[\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right] - \sum_{n=1}^{N} [x_n] \right\| = \left\| \left[\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n \right] \right\| \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n \right\|$$

□

Es seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Wir sagen, dass T offen ist, wenn T offene Mengen auf offene abbildet.

Lemma 93 *Es sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum. Dann ist die Quotientenabbildung $Q : X \to X/Y$, $Q(x) = [x]$, eine offene Abbildung.*

Das Bild der abgeschlossenen Kugel muss nicht gleich der abgeschlossenen Kugel im Quotientenraum sein. Dazu kannn man ein Funktional betrachten, das seine Norm nicht annimmt. Der Quotientenraum ist gleich $\mathbb{R}$. (Beispiel 19)

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass für alle $r > 0$

$$Q(\{x | \|x\| < r\}) = \{[x] | \, \|[x]\| < r\}$$

Es gilt $\|Q(x)\| = \|[x]\| \leq \|x\|$. Somit gilt

$$Q(\{x | \|x\| < r\}) \subseteq \{[x] | \, \|[x]\| < r\}$$

Sei andererseits $x \in X$ mit $\|[x]\| < r$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $y_\epsilon \in Y$ mit $\|[x]\| + \epsilon \geq \|x - y_\epsilon\|$. Wir können ϵ so klein wählen, dass $\|[x]\| + \epsilon < r$. Dann gilt $\|x - y_\epsilon\| < r$ und $Q(x - y_\epsilon) = [x]$. Also gilt

$$Q(\{x | \|x\| < r\}) \supseteq \{[x] | \, \|[x]\| < r\}$$

Es sei nun O eine offene Menge in X. Dann gibt es zu jedem $x \in O$ ein $\epsilon_x > 0$, so dass

$$O = \bigcup_{x \in O} B(x, \epsilon_x)$$

dann gilt

$$Q(O) = \bigcup_{x \in O} Q(B(x, \epsilon_x)) = \bigcup_{x \in O} \{[x] + Q(B(0, \epsilon_x))\}$$

□

Lemma 94 *Es sei X ein Banachraum und Y ein komplementierter Teilraum von X. Dann ist der Quotientenraum X/Y isomorph zu einem Teilraum von X.*

Beweis. Nach Lemma 91 gibt es einen weiteren Teilraum Z mit $Y \cap Z = \{0\}$ und $X = Y + Z$, so dass die Norm $\| \; \|_Y + \| \; \|_Z$ äquivalent zu der von X ist. Wir zeigen, dass X/Y isomorph zu Z ist. Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ und $z \in Z$, so dass $x = y + z$. Wir definieren $I : X/Y \to Z$ durch

$$I([x]) = z$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und bijektiv. Es sei $x \in X$ und $x = y + z$ mit $y \in Y$ und $z \in Z$. Dann gilt

$$\|x\|_{X/Y} = \inf_{u \in Y} \|x + u\|_X = \inf_{u \in Y} \|y + z + u\|_X \leq \|z\|$$

und

$$\|x\|_{X/Y} = \inf_{u \in Y} \|x + u\|_X = \inf_{u \in Y} \|z + y + u\|_X \geq c \inf_{u \in Y} (\|y + u\|_Y + \|z\|_Z) = c\|z\|_Z$$

□

Lemma 95 *Es seien X ein Banachraum, $T : X \to X$ ein beschränkter Operator mit $\|T\| < 1$ und I die identische Abbildung auf X. Dann ist $I - T$ bijektiv und $(I - T)^{-1}$ ein beschränkter Operator.*

Beweis. Da X ein Banachraum ist, so ist auch $L(X)$ ein Banachraum. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ konvergiert in $L(X)$, weil $\|T\| < 1$ und damit die Reihe absolut konvergiert. Es gilt

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Die Folge der Operatoren

$$(I - T) \sum_{n=0}^{k} T^n = I - T^{k+1}$$

konvergiert gegen I. □

3.2 Kompakte Operatoren

Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen heißt kompakt, wenn das Bild $T(\overline{B_X})$ der abgeschlossenen Einheitskugel relativ kompakt ist, wenn also der Abschluss von $T(\overline{B_X})$ kompakt ist.

$K(X, Y)$ bezeichnet die kompakten Operatoren. Man beachte, dass jede kompakte Abbildung stetig ist, weil dass Bild der Einheitskugel relativ kompakt und damit beschränkt ist.

Eine Abbildung ist genau dann kompakt, wenn das Bild jeder beschränkten Menge relativ kompakt ist.

Eine Abbildung ist genau dann kompakt, wenn das Bild jeder beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir überlegen uns dies. Wir nehmen zunächst an, dass der Abschluss von $T(\overline{B_X})$ kompakt ist. O.E.d.A. können wir annehmen, dass die beschränkte Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, in der Einheitskugel enthalten ist. Dann ist das Bild dieser Folge $T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, in einer kompakten Menge enthalten und besitzt also eine konvergente Teilfolge.

Nun die Umkehrung. Es sei y_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in $\overline{T(\overline{B_X})}$. Dann gibt es zu jedem y_n ein z_n mit $\|y_n - z_n\| \leq \frac{1}{n}$ und $z_n \in T(\overline{B_X})$. Dann besitzt z_n, $n \in \mathbb{N}$, eine konvergente Teilfolge z_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$. Die Folge y_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, konvergiert gegen denselben Grenzwert.

Lemma 96 *Es seien X, Y und Z Banachräume. Dann gilt*
(i) $K(X, Y)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L(X, Y)$.
(ii) Es seien $T \in L(X, Y)$ und $S \in L(Y, Z)$. Falls T oder S kompakt ist, dann ist auch $S \circ T$ kompakt.

Beweis. (i) Ein Operator $T : X \to$ ist genau dann kompakt, wenn T jede beschränkte Folge auf eine Folge abbildet, die eine konvergente Teilfolge besitzt.

Es ist offensichtlich, dass mit T auch sT kompakt ist. Es seien nun S, T kompakte Abbildungen und x_k, $k \in \mathbb{N}$, eine beschränkte Folge in X. Dann gibt es eine Teilfolge x_{k_i}, $i \in \mathbb{N}$, so dass $S(x_{k_i})$, $i \in \mathbb{N}$, konvergiert. Nun wählen wir eine weitere Teilfolge $x_{k_{i_n}}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass auch $T(x_{k_{i_n}})$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert. Damit konvergiert

$$(S + T)(x_{k_{i_n}}) \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

Nun zeigen wir, dass $K(X, Y)$ in $L(X, Y)$ abgeschlossen ist. Dazu benutzen wir ein Diagonalfolgenargument. Es seien $T_n \in K(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, und T_n, $n \in \mathbb{N}$, konvergiere gegen $T \in L(X, Y)$. Außerdem sei x_k, $k \in \mathbb{N}$, eine beschränkte Folge. Zu T_1 finden wir eine Teilfolge von x_k, $k \in \mathbb{N}$, die wir mit x_k^1, $k \in \mathbb{N}$, bezeichnen, so dass

$$T_1(x_k^1) \qquad\qquad k \in \mathbb{N}$$

konvergiert. Wir definieren nun induktiv eine Folge von Teilfolgen. Wenn wir die j-te Teilfolge x_k^j, $k \in \mathbb{N}$, gewählt haben, dann wählen wir aus dieser Teilfolge die $j + 1$-te Teilfolge x_k^{j+1}, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$T_{j+1}(x_k^{j+1}) \qquad\qquad k \in \mathbb{N}$$

konvergiert. Nun wählen wir die Diagonalfolge x_j^j, $j \in \mathbb{N}$, als Teilfolge. Dann konvergiert für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge

$$T_n(x_j^j) \qquad\qquad j \in \mathbb{N}$$

Wir zeigen nun, dass auch die Folge $T(x_j^j)$, $j \in \mathbb{N}$, konvergiert. Zu gegebenem $\epsilon > 0$ wählen wir n so groß, dass $\|T - T_n\| < \epsilon$. Nun wählen wir j_0 so groß, dass für alle $j, m \geq j_0$ die Ungleichung $\|T_n(x_j^j) - T_n(x_m^m)\| < \epsilon$ gilt. Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
&\|T(x_j^j) - T(x_m^m)\| \\
&\leq \|T(x_j^j) - T_n(x_j^j)\| + \|T_n(x_j^j) - T_n(x_m^m)| + \|T_n(x_m^m) - T(x_m^m)\| \\
&\leq \|x_j^j\|\|T - T_n\| + \epsilon + \|x_m^m\|\|T - T_n\| \\
&\leq (1 + 2\sup_{i \in \mathbb{N}} \|x_i^i\|)\epsilon
\end{aligned}$$

(ii) Es sei x_k, $k \in \mathbb{N}$, eine beschränkte Folge. Falls S kompakt und T beschränkt sind, dann ist $T(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, eine beschränkte Folge und $S(T(x_k))$, $k \in \mathbb{N}$, besitzt eine Teilfolge, die konvergiert.

Falls T kompakt und S beschränkt sind, dann gibt es eine Teilfolge x_{k_j}, $j \in \mathbb{N}$, so dass $T(x_{k_j})$, $j \in \mathbb{N}$, konvergiert. Da S stetig ist, konvergiert auch $S(T(x_{k_j}))$, $j \in \mathbb{N}$. □

Lemma 97 *Es seien X und Y Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Es sei $T_n \in L(X, Y)$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das Bild von T_n endlich-dimensional ist und T_n in der Norm gegen T konvergiert. Dann T ist kompakt.*

Die Umkehrung gilt auch für viele Räume X und Y, es gibt aber Beispiele, in denen die Umkehrung nicht gilt. Diese Frage wird im Rahmen der Approximationseigenschaft behandelt.

Beweis. T_n, $n \in \mathbb{N}$ sind kompakt, weil das Bild endlich-dimensional ist. Der Raum $K(X, Y)$ ist vollständig nach Lemma 96, deshalb ist T kompakt. □

Beispiel 15 *Es sei $1 \leq p < \infty$ und t_n, $\in \mathbb{N}$, eine beschränkte, reelle Folge. Der Multiplikationsoperator $M_t : \ell_p \to \ell_p$ ist durch*

$$M_t(x) = (t_1 x(1), t_2 x(2), \dots)$$

definiert.
(i) M_t ist stetig und $\|M_t\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |t_n|$.
(ii) M_t ist genau dann eine kompakte Abbildung, wenn

$$\lim_{n \to \infty} t_n = 0$$

Beweis. (ii) Falls M_t kompakt ist, dann ist das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel relativ kompakt. Mit Lemma 28 folgt, dass jede Teilfolge von $t_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine konvergente Teilfolge besitzt. Es folgt, dass $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$.

Nun die Umkehrung. Nach Lemma 71 gilt: Es sei $1 \leq p < \infty$. Eine Teilmenge K von ℓ_p ist genau dann relativ kompakt in der Norm Topologie, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein N existiert, so dass für alle $x \in A$

$$\sum_{j=N}^{\infty} |x(j)|^p < \epsilon$$

gilt.

3.3 Lineare Funktionale

Eine lineare Abbildung von einem topologischen Vektorraum X über dem Körper $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$ heißt lineares Funktional. Der Vektorraum aller stetigen, linearen Funktionale eines topologischen Vektorraumes X heißt Dualraum von X und wird mit X^* bezeichnet. Falls X ein normierter Vektorraum ist, dann ist X^* mit der Operatornorm wegen Lemma 89 ein Banachraum.

Der Dualraum ist von besonderer Bedeutung in der Funktionalanalysis. Wenn man z.B. eine Eigenschaft eines normierten Raumes überprüfen will, so kann es einfacher sein eine entsprechende Eigenschaft für den Dualraum nachzuweisen.

Lemma 98 *Es sei X ein topologischer, reeller Vektorraum und ϕ ein lineares Funktional auf X. ϕ ist genau dann stetig, wenn es eine Nullumgebung U gibt, auf der ϕ beschränkt ist.*

Beweis. Wir zeigen, dass aus der Stetigkeit von ϕ die Existenz einer Nullumgebung folgt, auf der ϕ beschränkt ist: Das Urbild des Intervalls $[-1, 1]$ ist eine Nullumgebung.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Es gebe eine Nullumgebung U und eine Konstante c, so dass für alle $x \in U$ die Ungleichung $|\phi(x)| \leq c$ gilt. Dann ist $\frac{\epsilon}{c}U$ eine Nullumgebung und

$$\phi^{-1}([-\epsilon, \epsilon]) \supseteq \tfrac{\epsilon}{c}U.$$

Damit ist für alle $\epsilon > 0$ das Urbild von $(-\epsilon, \epsilon)$ eine Nullumgebung. Somit ist ϕ in 0 stetig. Wegen Lemma 88 ist ϕ damit in allen Punkten stetig. $\Box$

Lemma 99 *Es sei X ein topologischer, reeller Vektorraum und $\phi : X \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional.*
(i) ϕ ist genau dann stetig, wenn der Teilraum $\{x \in X | \phi(x) = 0\}$ abgeschlossen ist.
(ii) Ein von 0 verschiedenes Funktional ϕ ist genau dann stetig, wenn $\{x \in X | \phi(x) = 0\}$ nicht dicht in X ist.

Beweis. (i) Falls ϕ stetig ist, so ist das Urbild jeder abgeschlossenen Menge abgeschlossen. Also ist $\{x \in X | \phi(x) = 0\}$ abgeschlossen.

Wir nehmen nun an, dass $\{x \in X | \phi(x) = 0\}$ abgeschlossen ist. Falls

$$X = \{x \in X | \phi(x) = 0\}$$

so ist das Funktional ϕ identisch 0 und damit stetig. Falls

$$X \neq \{x \in X | \phi(x) = 0\}$$

dann gibt es ein $x_0 \in X$ mit $x_0 \notin \{x \in X | \phi(x) = 0\}$. Da $\{x \in X | \phi(x) = 0\}$ abgeschlossen ist, gibt es eine Nullumgebung U mit

$$x_0 + U \cap \{x \in X | \phi(x) = 0\} = \emptyset$$

Wir können annehmen, dass U kreisförmig ist, d.h. für alle $x \in U$ und alle t mit $|t| \leq 1$ gilt $tx \in U$. Falls ϕ auf U nicht beschränkt ist, dann gibt es ein $x \in U$ mit

$$|\phi(x)| \geq |\phi(x_0)|$$

Weil U kreisförmig ist, gilt $-\frac{\phi(x_0)}{\phi(x)}x \in U$ und

$$x_0 - \frac{\phi(x_0)}{\phi(x)}x \in x_0 + U \quad \text{und} \quad \phi\left(x_0 - \frac{\phi(x_0)}{\phi(x)}x\right) = 0$$

Also gibt es einen Vektor in $x_0 + U$, der durch ϕ auf die 0 abgebildet wird. Andererseits gilt $x_0 + U \cap \{x \in X|\phi(x) = 0\} = \emptyset$. Dies ist ein Widerspruch.

(ii) Falls $\{x \in X|\phi(x) = 0\}$ in X dicht ist, dann muss $\overline{\{x \in X|\phi(x) = 0\}} = X$ gelten und das Funktional ist das 0-Funktional.

Falls $\{x \in X|\phi(x) = 0\}$ nicht in X dicht ist, so gilt für den Abschluss $X \neq \overline{\{x \in X|\phi(x) = 0\}}$. Da aber $\{x \in X|\phi(x) = 0\}$ Kern eines Funktionals ist, so muss die Codimension gleich 1 sein und somit ebenso für $\overline{\{x \in X|\phi(x) = 0\}}$. Damit gilt $\{x \in X|\phi(x) = 0\} = \overline{\{x \in X|\phi(x) = 0\}}$. $\square$

Beispiel 16 *Es sei $0 < p < 1$. Der topologische Vektorraum $L_p[0,1]$ besitzt genau ein stetiges Funktional, nämlich das 0-Funktional.*

Der Dualraum von ℓ_p, $0 < p < 1$, besteht nicht nur aus dem 0-Funktional. Die Koordinatenfunktionale sind stetig, weil

$$|a_i| \leq \|a\|_p$$

Deshalb separiert der Dualraum von ℓ_p die Punkte von ℓ_p. Man kann sogar zeigen, dass der Dualraum isometrisch isomorph zu ℓ_∞ ist.

Beweis. Wir nehmen an, dass es ein stetiges Funktional ϕ gibt, das von 0 verschieden ist. Dann gibt es ein $g_0 \in L_p$, so dass $g_0 \neq 0$ und $\phi(g_0) = 1$. Wir zeigen, dass ϕ nicht stetig ist. Dazu konstruieren wir eine Folge g_n, $n = 0, 1, \dots$ mit

$$\phi(g_1) \geq 1 \qquad \text{und} \qquad \|g_n\|_p = 2^{1-\frac{1}{p}}\|g_0\|_p$$

Eine solche Folge widerspricht der Stetigkeit, weil

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0 \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n\to\infty} \phi(g_n) \geq 1$$

Wir konstruieren die Folge aus der Funktion g_0. Wir machen den Induktionsschritt. Dazu wählen wir x_0, so dass

$$\int_0^{x_0} |g_n|^p dx = \int_{x_0}^1 |g_n|^p dx.$$

Auf Grund der Linearität von ϕ gilt

$$1 = \phi(g_n) = \phi(g_n\chi_{[0,x_0)}) + \phi(g_n\chi_{[x_0,1]}).$$

Somit gilt

$$\tfrac{1}{2} \leq \phi(g_n\chi_{[0,x_0)}) \qquad \text{oder} \qquad \tfrac{1}{2} \leq \phi(g_n\chi_{[x_0,1]}).$$

Wir setzen

$$g_{n+1} = \begin{cases} 2g_n\chi_{[0,x_0)} & \text{falls } \frac{1}{2} \leq \phi(g_n\chi_{[0,x_0)}) \\ 2g_n\chi_{[x_0,1]} & \text{falls } \frac{1}{2} > \phi(g_n\chi_{[0,x_0)}). \end{cases}$$

Dann gilt $\phi(g_{n+1}) \geq 1$ und, falls $g_{n+1} = 2 g_n \chi_{[0,x_0)}$,

$$\begin{aligned} \|g_{n+1}\|_p &= \left(\int_0^1 |2 g_n \chi_{[0,x_0)}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2 \left(\int_0^{x_0} |g_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^1 |g_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{1-\frac{1}{p}} \|g_n\|_p \end{aligned}$$

□

Lemma 100 *Es sei X ein topologischer, linearer Raum. Es gibt genau dann ein nichttriviales stetiges Funktional auf X, wenn X eine von X verschiedene konvexe Nullumgebung besitzt.*

Beispiel 17 *Auf jedem normierten, reellen, unendlich-dimensionalen Raum gibt es ein unstetiges Funktional*

Beweis. Es sei x_γ, $\gamma \in \Gamma$, eine Hamel Basis des Raumes. Wir können annehmen, dass für alle $\gamma \in \Gamma$ die Gleichung $\|x_\gamma\| = 1$ gilt. Wir können $\Gamma = \mathbb{N} \cup B$ schreiben, wobei $\mathbb{N}$ und B disjunkt sind. Nun definieren wir das Funktional ϕ durch

$$\phi(x_n) = n$$

und

$$\phi(x_\gamma) = 0 \qquad \gamma \in B$$

□

3.4 Satz von Hahn-Banach I: Die analytische Version

Hans Hahn (1879-1934) wurde in Wien geboren. Er studierte in Wien und Göttingen. Nach dem 1. Weltkrieg hatte er eine Professur in Bonn und ab 1921 in Wien.

Stefan Banach (1892-1945) wurde in Krakau geboren. Er studierte an der Technischen Hochschule in Lwow und wurde dort 1927 Professor.

Der Satz von Hahn-Banach besagt, dass man ein stetiges, lineares Funktional, das auf einem Teilraum definiert ist, zu einem stetigen linearen Funktional auf den ganzen Raum fortsetzen kann. Diese Aussage ist in dem Fall, dass der Raum endlich-dimensional ist, nicht sehr überraschend, weil alle linearen Abbildungen stetig sind und man mit Hilfe der Linearen Algbra leicht die Existenz einer Fortsetzung nachweist. Der entscheidende Punkt ist also, dass die Räume nicht endlich-dimensional sind.

Der Satz von Hahn-Banach ist ein wichtiges und grundlegendes Ergebnis der Funktionalanalysis. Es wurde 1927 von Hans Hahn, Wien, bewiesen und zwei Jahre später von Stefan Banach. Es handelt sich um ein abstraktes Ergebnis. Seine Bedeutung liegt gerade in dem hohen Abstraktionsgrad. Es findet breite Anwendung, ohne den Satz von Hahn-Banach ist die Funktionalanalysis nicht denkbar [Cas].

Es gibt zwei Formulierungen davon, eine analytische und eine geometrische. Die analytische besagt, dass man jedes stetige Funktional, das auf einem Teilraum eines normierten Raumes definiert ist, zu einem stetigen Funktional auf dem gesamten Raum fortsetzen kann.

Die geometrische Version besagt, dass sich zwei disjunkte, konvexe Mengen, durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen lassen. Hierbei muß man allerdings weitere Bedingungen an die Mengen stellen. So reicht es aus zu fordern, dass eine der Mengen offen ist. Auch reicht es aus zu fordern, dass eine Menge kompakt und die andere abgeschlossen ist. Zwei abgeschlossene, disjunkte, konvexe Mengen lassen sich i.a. nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen.

Es sei X ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $p: X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y \in X$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

und für alle $x \in X$ und alle $t \geq 0$

$$p(tx) = tp(x)$$

gelten, heißt Minkowski Funktional. Ein Minkowski Funktional kann auch negative Werte annehmen.

Satz 18 *Es sei X ein reeller Vektorraum und p ein Minkowski Funktional auf X. Y sei ein Teilraum von X und f ein lineares Funktional auf Y, so dass für alle $x \in Y$*

$$f(x) \leq p(x)$$

gilt. Dann gibt es ein lineares Funktional F auf X, so dass für alle $x \in X$

$$F(x) \leq p(x)$$

gilt und so dass für alle $x \in Y$ gilt, dass $F(x) = f(x)$.

Die Räume $L^p[0,1]$ mit $0 < p < 1$ sind Beispiele für Räume, wo der Satz von Hahn-Banach nicht gilt. Es lässt sich auf jedem 1-dimensionalen Teilraum ein stetiges, lineares Funktional definieren, das von 0 verschieden ist. Man kann es aber nicht auf den gesamten Raum fortsetzen, weil es kein stetiges, von 0 verschiedenes Funktional dort gibt.

Beim Beweis des Satzes von Hahn-Banach geht wie bei vielen weiteren Ergebnissen das Lemma von Zorn ein. Der Satz von Hahn-Banach ist also eine der Früchte des Zorns.

Beweis. Es sei f ein lineares Funktional auf einem Teilraum Z von X mit $Z \neq X$, so dass für alle $x \in Z$ die Ungleichung $f(x) \leq p(x)$ gilt. Dann gibt es einen Vektor $x_0 \notin Z$ und ein Funktional

$$g : V \to \mathbb{R}$$

wobei

$$V = \{z | z = y + tx_0, y \in Z, t \in \mathbb{R}\}$$

die lineare Hülle von x_0 und Z ist und

$$\begin{aligned} \forall x \in V &: g(x) \leq p(x) \\ \forall x \in Z &: g(x) = f(x) \end{aligned}$$

Wir zeigen diese Behauptung. Es gilt

$$\sup\{f(y) - p(y - x_0) | y \in Z\} \leq \inf\{p(y + x_0) - f(y) | y \in Z\}$$

Wir überprüfen dies. Für alle $y_1, y_2 \in Z$ gilt

$$f(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2).$$

Deshalb gilt für alle $y_1, y_2 \in Z$

$$f(y_1) + f(y_2) \leq p(y_1 - x_0 + x_0 + y_2) \leq p(y_1 - x_0) + p(x_0 + y_2).$$

Somit gilt für alle $y_1, y_2 \in Z$

$$f(y_1) - p(y_1 - x_0) \leq p(x_0 + y_2) - f(y_2).$$

Wir wählen α, so dass

$$\sup\{f(y) - p(y - x_0) | y \in Z\} \leq \alpha \leq \inf\{p(y + x_0) - f(y) | y \in Z\}$$

und setzen
$$g(y + tx_0) = f(y) + t\alpha.$$
Offenbar ist g ein lineares Funktional und stimmt mit f auf Z überein. Wir müssen noch nachprüfen, dass für alle $z \in V$ die Ungleichung $g(z) \leq p(z)$ gilt. Wir betrachten den Fall $t > 0$.

$$\begin{aligned} g(y + tx_0) \quad &= f(y) + t\alpha = t(\tfrac{1}{t} f(y) + \alpha) = t(f(\tfrac{1}{t}y) + \alpha) \\ &\leq t\{f(\tfrac{1}{t}y) + p(x_0 + \tfrac{1}{t}y) - f(\tfrac{1}{t}y)\} = tp(x_0 + \tfrac{1}{t}y) = p(tx_0 + y) \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Fall $t < 0$.

$$\begin{aligned} g(y + tx_0) \quad &= f(y) + t\alpha = |t|(f(\tfrac{1}{|t|}y) - \alpha) \\ &\leq |t|\{f(\tfrac{1}{|t|}y) + p(\tfrac{1}{|t|}y - x_0) - f(\tfrac{1}{|t|}y)\} \\ &= |t|p(\tfrac{1}{|t|}y - x_0) = p(y - |t|x_0) = p(y + tx_0) \end{aligned}$$

Nun beenden wir den Beweis mit dem Lemma von Zorn. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{F}$ aller Paare (g, Z) mit
(i) Z ist Teilraum von X und Y ist Teilraum von Z.
(ii) g ist lineares Funktional auf Z, so dass für alle $y \in Z$ gilt, dass $g(y) \leq p(y)$, und so dass für alle $y \in Y$ gilt, dass $g(y) = f(y)$. Wir führen auf $\mathfrak{F}$ eine Halbordnung ein. Wir sagen, dass $(g, Z) \leq (h, W)$ gilt, wenn

$$Z \subseteq W \quad \text{und} \quad \forall y \in Z : g(y) = h(y)$$

Wir zeigen nun, dass jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke hat. Es sei $\mathfrak{F}_1$ linear geordnet. Wir definieren

$$V = \bigcup_{(g,Z)\in\mathfrak{F}_1} Z \quad \text{und} \quad h(x) := g(x) \quad \text{für } g \text{ mit } (g, Z) \in \mathfrak{F}_1 \text{ und } x \in Z$$

Für alle $y \in V$ gilt $h(y) \leq p(y)$. (h, V) ist eine obere Schranke für $\mathfrak{F}_1$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element (F, W). Wir müssen zeigen, dass $W = X$ gilt. Falls $W \neq X$, dann können wir mit der obigen Konstruktion das Funktional auf einen größeren Teilraum fortsetzen. Dies widerspricht der Maximalität. $\square$

Korollar 4 *Es sei X ein reeller, normierter Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Es sei $f : Y \to \mathbb{R}$ ein stetiges, lineares Funktional. Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$\forall\ x \in Y : F(x) = f(x) \quad \textit{und} \quad \|f\| = \|F\|$$

Beweis. Wir verwenden als Minkowski Funktional $p(x) = \|f\|\ \|x\|_X$. $\square$

Falls der Teilraum Y nicht abgeschlossen ist, so kann man das Funktional mittels der Stetigkeit auf die abgeschlossene Hülle fortsetzen.

Beispiel 18 *(i) Es gibt auf dem Raum ℓ_∞ aller beschränkten Folgen ein lineares Funktional, das jeder konvergenten Folge ihren Grenzwert zuordnet. Man spricht hier vom verallgemeinerten Limes oder Banach Limes.*

(ii) Es sei ℓ^∞ der Raum aller reellen, beschränkten Folgen. Es sei τ der Translationsoperator $\tau : \ell_\infty \to \ell_\infty$

$$(\tau x)(n) = x(n+1) \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional ϕ auf ℓ_∞, so dass
(i) $\phi(\tau x) = \phi(x)$
(ii) Für alle $x \in \ell_\infty$ gilt, dass

$$\liminf_{n\to\infty} x(n) \le \phi(x) \le \limsup_{n\to\infty} x(n)$$

Beweis. (i) Auf dem Raum c aller konvergenten Folgen definieren wir das Funktional $\ell : c \to \mathbb{R}$

$$\ell(x) = \lim_{i\to\infty} x_i$$

Es gilt $\|\ell\| = 1$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (Satz 18) können wir dieses Funktional auf den Raum ℓ_∞ fortsetzen.

(ii) Wir betrachten

$$a_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k)$$

und

$$X = \left\{ x \in \ell_\infty \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} a_n(x) \text{ existiert} \right\}$$

X ist ein Teilraum von ℓ_∞. Wir definieren $\phi : X \to \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x)$$

Wir setzen

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} a_n(x).$$

Wir zeigen, dass p auf ℓ_∞ ein Minkowski Funktional ist. Es gilt

$$\begin{aligned} p(x+y) \qquad &= \limsup_{n\to\infty} a_n(x+y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k) + y(k) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k) + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y(k) = p(x) + p(y) \end{aligned}$$

und für $t > 0$

$$p(tx) = \limsup_{n\to\infty} a_n(tx) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} tx(k) = t \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k) = tp(x)$$

Für alle $x \in X$ gilt

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \limsup_{n\to\infty} a_n(x) = p(x)$$

Nun können wir den Satz von Hahn-Banach auf den Raum ℓ_∞, den Teilraum X, das Minkowski Funktional p und das lineare Funktional ϕ, das auf X definiert ist, anwenden. Es gibt also eine Fortsetzung $\tilde{\phi}$, die auf ℓ_∞ definiert ist und die für alle $x \in \ell_\infty$

$$\tilde{\phi}(x) \le p(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(k)$$

erfüllt.

Wir zeigen nun, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k) \le \limsup_{n\to\infty} x(n).$$

Es gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \forall n \ge n_\epsilon \sup_{n\le k} x(k) \le \limsup_{k\to\infty} x(k) + \epsilon$$

Deshalb

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k) \quad &= \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_\epsilon} x(k) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_\epsilon+1}^{n} x(k) \right\} \\
&\le \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_\epsilon} x(k) + \frac{n-n_\epsilon}{n}\left(\limsup_{k\to\infty} x(k) + \epsilon \right) \right\} \\
&= \limsup_{k\to\infty} x(k) + \epsilon
\end{aligned}$$

Also gilt für alle $x \in \ell^\infty$

$$\tilde{\phi}(x) \le \limsup_{k\to\infty} x(k)$$

Da dieselbe Ungleichung auch für $-x$ gilt, erhalten wir

$$\liminf_{k\to\infty} x(k) \le \tilde{\phi}(x) \le \limsup_{k\to\infty} x(k).$$

Wir zeigen nun, dass $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(\tau x)$ gilt. Dazu überlegen wir uns, dass $x - \tau x \in X$.

$$a_n(x-\tau x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x(k) - x(k+1)) = \frac{1}{n}(x(1) - x(n+1))$$

Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x-\tau x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x(1) - x(n+1)) = 0$$

Es folgt

$$\tilde{\phi}(x-\tau x) = \phi(x-\tau x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x-\tau x) = 0$$

Wegen der Linearität von $\tilde{\phi}$ folgt nun $\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi}(\tau x)$. $\Box$

Der Satz von Hahn-Banach lässt sich nicht auf lineare Abbildungen ausdehnen, deren Bild ein normierter Raum ist. Falls der Bildraum endlich dimensional ist, so erhält man für lineare, beschränkte Operatoren

$$T : Y \to Z \quad \text{und} \quad Y \subset X$$

dass eine Fortsetzung $\tilde{T}$ auf X mit

$$\|\tilde{T}\| \le \sqrt{\dim Z}\|T\|$$

existiert. I.a. muss keine Fortsetzung existieren. Dazu geben wir das folgende Beispiel an, das wir aber erst später verifizieren können (Lemma 117).

Es sei $id : c_0 \to c_0$ die identische Abbildung. Es gibt keine lineare, beschränkte Abbildung $\tilde{id} : \ell^\infty \to c_0$, so dass für alle $x \in c_0$ gilt, dass $x = id(x) = \tilde{id}(x)$.

Beispiel 19 *Das Funktional $\phi : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch*

$$\phi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$$

gegeben.

(i) Das Funktional nimmt nicht sein Supremum auf der abgeschlossenen Einheitskugel an.
(ii) ϕ bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.
(iii) Das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel ist das offene Intervall $(-1,1)$. Es gibt also eine abgeschlossene Menge, deren Bild nicht eine abgeschlossene Menge ist.
(iv) Die Quotientenabbildung $q : C[0,1] \rightarrow C[0,1]/\operatorname{Kern}\phi$ bildet die abgeschlossene Einheitskugel auf die offene Einheitskugel $B_{C[0,1]/\operatorname{Kern}(\phi)}$ ab.

Beweis. (i) Die Norm von ϕ ist 1.

$$\sup_{\|f\|=1} |\phi(f)| = \sup_{\|f\|=1} \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \right| \leq \sup_{\|f\|=1} \int_0^1 |f(t)|dt = 1$$

Wir nehmen an, dass das Funktional sein Supremum annimmt. Dann gibt es eine stetige Funktion f mit $\|f\|_\infty = 1$ und

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = 1$$

Damit folgt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) - 1dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 1 - f(t)dt$$

Da $f - 1 \leq 0$ folgt

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) - 1dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 1 - f(t)dt = 0$$

$f-1$ ist eine nichtpositive, stetige Funktion. Damit folgt, dass $f(t) = 1$ für $t \in [0, \frac{1}{2})$ und $f(t) = -1$ für t mit $t \in (\frac{1}{2}, 1]$. Das kann nicht sein, weil f stetig ist.

(ii) Es reicht zu zeigen, dass das Bild der offenen Einheitskugel die offene Einheitskugel ist. Dazu betrachten wir die Funktionen $g_\alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,\alpha] \\ -\frac{2}{1-2\alpha}t + \frac{1}{1-2\alpha} & t \in (\alpha, 1-\alpha) \\ -1 & t \in [1-\alpha, 1] \end{cases}$$

Es gilt $\{\phi(g_\alpha) | \alpha \in [0, \frac{1}{2})\} = [0,1)$

(iv) Wir zeigen, dass ϕ sein Supremum auf der abgeschlossenen Einheitskugel annimmt, falls das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel nicht gleich der offenen Einheitskugel in $C[0,1]/\operatorname{Kern}(\phi)$ ist.

Nach Lemma 93 ist die Quotientenabbildung eine offene Abbildung. Also ist das Bild der offenen Einheitskugel die offene Einheitskugel. Wenn also das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel nicht gleich der offenen Einheitskugel in $C[0,1]/\operatorname{Kern}(\phi)$ ist, dann gibt es ein f mit $\|f\|_\infty = 1$ und

$$\|[f]\|_{C[0,1]/\operatorname{Kern}(\phi)} = \inf\{\|f + g\|_\infty | \phi(g) = 0\} = 1$$

Wir betrachten nun das Funktional $\psi : C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(tf + g) = t \qquad\qquad g \in \operatorname{Kern}(\phi), t \in \mathbb{R}$$

Dann gilt

$$\|\psi\| = \sup_{\substack{tf+g \neq 0 \\ \phi(g)=0}} \frac{|t|}{\|tf + g\|}$$

Da wir für $t = 0$ den Wert 0 erhalten, reicht es das Supremum über alle $tf + g$ mit $t \neq 0$ und $\phi(g) = 0$ zu bilden.

$$\|\psi\| = \sup_{\substack{\phi(g) = 0 \\ t \neq 0}} \frac{|t|}{\|tf + g\|} = \sup_{\substack{\phi(g) = 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{\|f + \frac{1}{t}g\|} = \sup_{\phi(h)=0} \frac{1}{\|f + h\|} = 1$$

Das Funktional ψ nimmt sein Supremum an, weil

$$|\psi(f)| = 1$$

Andererseits ist ψ ein skalares Vielfaches von ϕ, weil ϕ und ψ denselben Kern besitzen. Also nimmt ϕ sein Supremum an, was falsch ist. $\square$

3.5 Satz von Hahn-Banach II: Die geometrische Version

Die geometrische Version des Satzes von Hahn-Banach besagt, dass sich zwei disjunkte konvexe Mengen durch eine Hyperebene trennen lassen. Wir sind hier nur an abgeschlossenen Hyperebenen interesssiert. Damit die Trennungsaussage gilt, müssen wir Voraussetzungen an die Mengen stellen. Es reicht schon, dass eine Menge einen inneren Punkt besitzt (Satz 19), oder dass eine Menge kompakt und die andere abgeschlossen ist (Satz 20).

Andererseits gibt es zwei disjunkte, konvexe, abgeschlossene Mengen, die sich nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen lassen (Beispiel 22). Die meisten Beispiele solcher Mengen A und B haben die Eigenschaft, dass $A-B$ in dem Vektorraum dicht ist. Dann ist der Abschluss von $\phi(A-B)$ gleich $\mathbb{R}$, aber wenn ein Funktional ϕ trennen soll, dann müsste $\phi(A-B) \subseteq [0,\infty)$ oder $\phi(A-B) \subseteq [0,-\infty)$ gelten.

Dieses Beispiel lässt sich weiter verschärfen: Es gibt in ℓ_1 zwei disjunkte, konvexe, abgeschlossene, beschränkte Mengen, die sich nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen lassen. Tatsächlich ist dies sogar eine Charakterisierung der reflexiven Räume: Es gibt genau dann in einem Banachraum zwei disjunkte, konvexe, abgeschlossene, beschränkte Mengen, die sich nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen lassen, wenn der Raum reflexiv ist (Satz 56).

Eine Hyperebene H ist eine Teilmenge eines Vektorraumes X, die die Gestalt $x_0 + Y$ besitzt, wobei $x_0 \in X$ und Y ein Teilraum mit Kodimension 1 ist. H ist genau dann eine Hyperebene, falls es ein lineares Funktional f und ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$H = \{x | f(x) = c\}.$$

Eine Hyperebene H eines topologischen Vektorraumes ist genau dann abgeschlossen, wenn es ein stetiges Funktional f und ein $c \in \mathbb{R}$ mit $H = \{x|f(x) = c\}$ gibt.

Falls f stetig ist, so ist die Menge $f^{-1}(c) = \{x|f(x) = c\}$ abgeschlossen, weil sie Urbild einer abgeschlossenen Menge ist. Umgekehrt, falls die Menge $\{x|f(x) = c\}$ abgeschlossen ist, dann ist auch die Menge $\{x|f(x) = 0\}$ abgeschlossen und nun folgt die Stetigkeit von f mit Lemma 99.

Falls eine Hyperebene in einem topologischen Vektorraum nicht abgeschlossen ist, dann ist sie dicht.

Wir sagen, dass zwei disjunkte Mengen A und B durch eine abgeschlossene Hyperebene bzw. ein stetiges Funktional ϕ getrennt werden, falls

$$\sup_{x \in A} \phi(x) \leq \inf_{x \in B} \phi(x).$$

Dies bedeutet, dass A in dem einen abgeschlossenen Halbraum liegt, B in dem anderen abgeschlossenen Halbraum. Es kann also sein, dass beide Mengen A und B in der Hyperebene liegen. Somit bekommt man den Eindruck, dass dieser Trennungsbegriff etwas schwach ist.

Eine leichte Verschärfung stellt die folgende Trennungsbedingung dar: Für alle $x \in A$ und alle $y \in B$ gilt die Ungleichung $\phi(x) < \phi(y)$. Geometrisch bedeutet dies, dass A oder B in einem der offenen Halbräume enthalten sind. Wir sagen in diesem Fall, dass die Mengen strikt getrennt werden.

Wir sagen, dass zwei disjunkte Mengen stark getrennt werden, wenn es ein stetiges Funktional ϕ gibt, so dass

$$\sup_{x\in A}\phi(x) < \inf_{x\in B}\phi(x).$$

bzw. wenn es ein stetiges Funktional ϕ, ein $c \in \mathbb{R}$ und ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in A$ und alle $y \in B$ die Ungleichungen

$$\phi(x) \leq c - \epsilon \qquad\qquad \phi(y) \geq c + \epsilon$$

gelten.

Der folgende Satz besagt, dass man zwei konvexe, disjunkte Mengen durch eine abgeschlossene Hyperebene strikt trennen kann, falls eine der beiden Mengen offen ist. Es ist die geometrische Version des Satzes von Hahn-Banach.

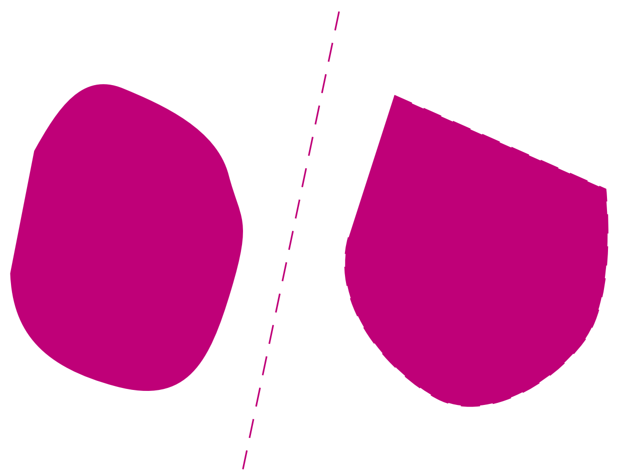
Satz 19 *Es sei X ein normierter, reeller Raum, A eine nichtleere, konvexe Menge, die einen inneren Punkt besitzt, und B eine nichtleere konvexe Menge. Es seien A und B disjunkt. Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional f mit $f \neq 0$, so dass*

$$\sup_{x\in A} f(x) \leq \inf_{x\in B} f(x)$$

Falls A überdies offen ist, dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional f, so dass für alle $x \in A$ und alle $y \in B$ die Ungleichung

$$f(x) < f(y)$$

gilt.



Zwei konvexe, disjunkte Mengen lassen sich durch eine Hyperebene trennen

Diese Mengen lassen sich nicht durch eine Hyperebene trennen

Lemma 101 *Es sei X ein normierter Raum, C eine konvexe Umgebung der* 0 *und* $p : X \to \mathbb{R}$ *sei durch*

$$p(x) = \inf \left\{ t > 0 | \tfrac{1}{t}x \in C \right\}$$

definiert. Dann ist p ein Minkowski Funktional und

$$\{x|p(x) < 1\} \subseteq C \subseteq \{x|p(x) \leq 1\}.$$

Falls C sogar offen ist, dann gilt

$$C = \{x|p(x) < 1\}.$$

Man bezeichnet p als das von C erzeugte Minkowski Funktional.

Beweis. p ist wohldefiniert, d.h. $p(x)$ ist für alle $x \in X$ endlich. Dies gilt, weil C eine Umgebung der 0 ist und deshalb nach Lemma 44 die Gleichung $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nC$ gilt.

Wir zeigen, dass p die Dreiecksungleichung erfüllt. Falls $\frac{1}{t}x \in C$ und $\frac{1}{s}y \in C$, dann gilt wegen der Konvexität von C

$$\tfrac{1}{s+t}(x+y) = \tfrac{t}{s+t}(\tfrac{1}{t}x) + \tfrac{s}{s+t}(\tfrac{1}{s}y) \in C. \tag{3.2}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} p(x) + p(y) \qquad &= \inf\{t|\tfrac{1}{t}x \in C\} + \inf\{s|\tfrac{1}{s}y \in C\} \\ &= \inf\{t + s|\tfrac{1}{t}x \in C, \tfrac{1}{s}y \in C\} \end{aligned}$$

Mit (3.2) folgt

$$p(x) + p(y) \geq \inf \left\{ t + s \,\middle|\, \tfrac{1}{t+s}(x+y) \in C \right\} = p(x+y).$$

Wir weisen die Homogenität von p nach. Für $r > 0$

$$p(rx) = \inf\left\{t \,\middle|\, \tfrac{1}{t}rx \in C\right\} = r\inf\left\{\tfrac{t}{r} \,\middle|\, \tfrac{1}{t}rx \in C\right\} = rp(x).$$

Falls $x \in C$, so gilt $p(x) \leq 1$ und wir haben $C \subseteq \{x|p(x) \leq 1\}$.

Falls $p(x) < 1$, dann gibt es ein $t < 1$ mit $\frac{1}{t}x \in C$. Wegen der Konvexität von C und $0 \in C$ folgt

$$[0, x] \subseteq [0, \tfrac{1}{t}x] \subseteq C.$$

Wir zeigen nun, dass $C = \{x|p(x) < 1\}$ gilt, falls C offen ist. Es reicht $C \subseteq \{x|p(x) < 1\}$ zu zeigen. Falls C offen ist, dann gibt es zu jedem $x \in C$ ein $\epsilon > 0$, so dass $(1+\epsilon)x \in C$. Deshalb gilt

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$$

□

Lemma 102 *Es sei X ein normierter Raum und C eine konvexe Umgebung der* 0 *mit dem dazugehörigen Minkowski-Funktional p. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $x \in X$*

$$p(x) \leq c\|x\|_X$$

gilt.

Beweis. Es gibt $\epsilon > 0$, so dass $B(0, \epsilon) = \{x| \|x\| < \epsilon\} \subset C$. Es folgt

$$\begin{aligned} p(x) \quad &= \inf\{t|\tfrac{1}{t}x \in C\} \leq \inf\{t|\tfrac{1}{t}x \in B(0,\epsilon)\} \\ &= \inf\{t|x \in B(0, t\epsilon)\} = \inf\{t|\tfrac{1}{\epsilon}x \in B(0,t)\} = \|\tfrac{1}{\epsilon}x\|_X \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 19. Wir wählen einen inneren Punkt x_0 in A und einen beliebigen Punkt $y_0 \in B$. Dann ist

$$C = A - B + (y_0 - x_0)$$

eine konvexe Umgebung von 0. Es gilt $0 \in C$, weil $x_0 \in A$ und $y_0 \in B$. C ist konvex: Es seien $u, w \in C$. Dann gibt es $x_1, x_2 \in A$ und $y_1, y_2 \in B$ mit

$$\begin{aligned} u &= x_1 - y_1 + (y_0 - x_0) \\ w &= x_2 - y_2 + (y_0 - x_0) \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &tu + (1-t)w \\ &= tx_1 - ty_1 + t(y_0 - x_0) + (1-t)x_2 - (1-t)y_2 + (1-t)(y_0 - x_0) \\ &= \underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in A} - (\underbrace{ty_1 + (1-t)y_2}_{\in B}) + (y_0 - x_0) \end{aligned}$$

Da x_0 ein innerer Punkt von A ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B(x_0, \epsilon) \subset A$.

$$C = \{x - y + (y_0 - x_0) | x \in A, y \in B\} \supseteq \{x - x_0 | x \in B(x_0, \epsilon)\} = B(0, \epsilon)$$

Es sei p das zu C gehörige Minkowski Funktional. Es gilt $y_0 - x_0 \notin C$. Falls nämlich $y_0 - x_0 \in C$, dann gibt es $x \in A$ und $y \in B$ mit

$$y_0 - x_0 = x - y + y_0 - x_0$$

Also gilt $x = y$, was nicht sein kann, weil A und B disjunkt sind. Da $y_0 - x_0 \notin C$, so folgt $p(y_0 - x_0) \geq 1$. Wir betrachten den 1-dimensionalen Teilraum

$$Z = \{t(y_0 - x_0) |\ t \in \mathbb{R}\}$$

und darauf das Funktional $f : Z \to \mathbb{R}$

$$f(t(y_0 - x_0)) = t.$$

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t(y_0 - x_0)) \leq p(t(y_0 - x_0)).$$

Wir prüfen dies nach. Für $t \geq 0$ erhalten wir

$$f(t(y_0 - x_0)) = t \leq t\ p(y_0 - x_0) = p(t(y_0 - x_0)).$$

Falls $t < 0$, so gilt

$$f(t(y_0 - x_0)) = t < 0 \leq p(t(y_0 - x_0)).$$

Wir wenden nun den Satz von Hahn-Banach (Satz 18) auf f an und erhalten $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F \leq p$. Es gilt also für alle $x \in X$

$$F(x) \leq p(x)$$

Mit Lemma 102 erhalten wir für alle $x \in X$

$$F(x) \leq c\|x\|.$$

Da dies auch für $-x$ gilt, erhalten wir für alle $x \in X$

$$|F(x)| \leq c\|x\|.$$

Also ist F stetig. Für alle $x \in A, y \in B$ gilt

$$F(x) - F(y) + 1 = F(x - y + y_0 - x_0) \leq p(x - y + y_0 - x_0)$$

Da $x - y + y_0 - x_0 \in C$, folgt mit Lemma 101

$$F(x) - F(y) + 1 \leq 1.$$

Deshalb gilt für alle $x \in A$ und $y \in B$

$$F(x) \leq F(y).$$

Also gilt

$$\sup_{x \in A} F(x) \leq \inf_{y \in B} F(y).$$

Wir wollen noch den Fall betrachten, dass A offen ist. Der Beweis wird nur an einigen Stellen modifiziert. Zunächst beobachten wir, dass $C = A - B + (y_0 - x_0)$ offen ist. Dies folgt aus der Gleichung

$$C = \bigcup_{y \in B} y_0 - x_0 - y + A$$

Die rechte Seite ist eine Vereinigung offener Mengen. Deshalb gilt nach Lemma 101 für alle $x \in C$ die Ungleichung $p(x) < 1$, also insbesondere gilt für alle $x \in A$ und $y \in B$

$$p(x - y + y_0 - x_0) < 1.$$

□

Beispiel 20 *Es sei $L^2([-1,1])$ der Raum aller quadratintegrierbaren Funktionen bzgl. des Lebesgue Maßes. Für jede Zahl α sei E_α die Menge aller stetigen Funktionen f auf $[-1,1]$ mit $f(0) = \alpha$. Dann ist für alle α die Menge E_α konvex und dicht in $L^2([-1,1])$. Weiter sind für alle $\alpha \neq \beta$ die Mengen E_α und E_β disjunkt und sie lassen sich nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen.*

Beweis. Wir zeigen, dass man E_α und E_β nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen kann. Wir nehmen an, dass es ein stetiges Funktional ϕ gibt, das von 0 verschieden ist und das E_α und E_β trennt. Dann gilt

$$\sup_{x \in E_\alpha} \phi(x) \leq \inf_{y \in E_\beta} \phi(y).$$

Da E_α in L^2 dicht ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $z \in E_\alpha$ mit $\|z\| < \epsilon$. Deshalb

$$\sup_{x \in E_\alpha} \phi(x) \geq \phi(z) \geq -|\phi(z)| \geq -\|\phi\| \|z\| \geq -\|\phi\| \epsilon.$$

Da diese Abschätzung für alle ϵ gilt, folgt

$$\sup_{x \in E_\alpha} \phi(x) \geq 0.$$

Es gibt ein $u \in X$ mit $\phi(u) < 0$. Da E_β dicht in L^2 liegt, gibt es ein $w \in E_\beta$ mit $\|u - w\| < \frac{|\phi(u)|}{4\|\phi\|}$. Es folgt

$$\phi(w) = \phi(u) + \phi(w - u) \leq \phi(u) + \|\phi\| \|u - w\| \leq \phi(u) + \tfrac{1}{4}|\phi(u)| = \tfrac{3}{4}\phi(u) < 0.$$

Deshalb gilt

$$\inf_{y \in E_\beta} \phi(y) < 0.$$

Das ist ein Widerspruch. □

Beispiel 21 *Es seien*

$$A=\{x\in\ell^1|\ \exists n\in\mathbb{N}\ \forall m>n: x_m=0 \text{ und } x_n>0\}$$
$$B=\{x\in\ell^1|\ \exists n\in\mathbb{N}\ \forall m>n: x_m=0 \text{ und } x_n<0\}$$

A und B sind disjunkte, konvexe Mengen, die durch keine abgeschlossene Hyperebene getrennt werden können.

Beweis. Es ist offensichtlich, dass A und B disjunkt sind. Wir zeigen, dass A konvex ist. Es seien $x,y\in A$. Dann gilt

$$x=\sum_{i=1}^{m}x_ie_i \qquad \text{mit } x_m>0$$
$$y=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i \qquad \text{mit } y_n>0$$

Es sei $n=m$. Dann gilt

$$tx+(1-t)y=\sum_{i=1}^{n}(tx_i+(1-t)y_i)e_i$$

$tx+(1-t)y\in A$ weil $tx_n+(1-t)y_n>0$.

Falls $n<m$, dann gilt

$$tx+(1-t)y=\sum_{i=1}^{n}(tx_i+(1-t)y_i)e_i+\sum_{i=n+1}^{m}tx_ie_i$$

Es gilt $tx+(1-t)y\in A$, weil $tx_m>0$. Wir nehmen nun an, dass es eine abgeschlossene Hyperebene gibt, die A und B trennt, und zeigen, dass dann $\phi=0$ gilt. Wir nehmen an, dass $\phi(e_n)>0$ gilt. Es gilt für alle $s\in\mathbb{R}$

$$se_n+e_{n+1}\in A$$

Damit folgt

$$\sup_{x\in A}\phi(x)\geq\sup_{s\in\mathbb{R}}(s\phi(e_n)+\phi(e_{n+1}))=\infty$$
$$\inf_{x\in A}\phi(x)\leq\inf_{s\in\mathbb{R}}(s\phi(e_n)+\phi(e_{n+1}))=-\infty$$

Somit lassen sich A und B nicht trennen. Also muss $\phi(e_n)\leq 0$ gelten. Wir gehen genauso vor, um zu zeigen, dass $\phi(e_n)=0$ gilt. Schliesslich erhalten wir, dass für alle $n\in\mathbb{N}$

$$\phi(e_n)=0$$

gilt. Es folgt für $x\in\ell^1$

$$|\phi(x)|=\left|\phi\left(\sum_{i=n}^{\infty}x_ie_i\right)\right|\leq\|\phi\|\ \left\|\sum_{i=n}^{\infty}x_ie_i\right\|=\|\phi\|\ \sum_{i=n}^{\infty}|x_i|$$

Für $n\to\infty$ konvergiert die rechte Seite und damit auch die linke Seite gegen 0. Damit gilt $\phi=0$. Dies ist unwahr. $\square$

Satz 20 *Es seien X ein normierter Raum, A eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von X und B eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge von X. A und B seien disjunkt. Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional ϕ und ein $c\in\mathbb{R}$ mit*

$$\sup_{x\in A}\phi(x)<c<\inf_{x\in B}\phi(x)$$

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$. Dann sind

$$A_\epsilon = A + B(0,\epsilon) \quad \text{und} \quad B_\epsilon = B + B(0,\epsilon)$$

nichtleere, konvexe, offene Mengen. Die Menge A_ϵ ist offen, weil

$$A_\epsilon = A + B(0,\epsilon) = \bigcup_{a\in A} a + B(0,\epsilon) = \bigcup_{a\in A} B(a,\epsilon)$$

eine Vereinigung von offenen Mengen und somit selbst offen ist. Aus denselben Gründen ist B_ϵ offen.

Nach Lemma 43 gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$.

Also gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass A_ϵ und B_ϵ zwei nichtleere, konvexe, offene, disjunkte Mengen sind. Nach Satz 19 gibt es ein ϕ mit $\phi \neq 0$ und

$$\sup_{x\in A_\epsilon} \phi(x) \leq \inf_{x\in B_\epsilon} \phi(x)$$

Es folgt

$$\sup_{\substack{x \in A \\ y \in B(0,1)}} \phi(x+\epsilon y) \leq \inf_{\substack{x \in B \\ y \in B(0,1)}} \phi(x+\epsilon y)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{x \in A \\ y \in B(0,1)}} \phi(x+\epsilon y) &= \sup_{\substack{x \in A \\ y \in B(0,1)}} \{\phi(x) + \phi(\epsilon y)\} \\ &= \sup_{x\in A} \phi(x) + \sup_{y\in B(0,1)} \epsilon\phi(y) = \sup_{x\in A} \phi(x) + \epsilon\|\phi\|.\end{aligned}$$

Genauso zeigen wir

$$\inf_{\substack{x \in B \\ y \in B(0,1)}} \phi(x+\epsilon y) = \inf_{x\in B} \phi(x) - \epsilon\|\phi\|.$$

Hieraus folgt

$$\sup_{x\in A} \phi(x) + \epsilon\|\phi\| \leq \inf_{x\in B} \phi(x) - \epsilon\|\phi\|$$

Nun können wir $c = \sup_{x\in A} \phi(x) + \epsilon\|\phi\|$ setzen. $\square$

Satz 21 *Es seien A und B zwei nichtleere, disjunkte, konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine abgeschlossene Hyperebene, die diese beiden Mengen trennt.*

Es ist nicht immer möglich zwei abgeschlossene, konvexe Mengen durch eine abgeschlossene Hyperebene zu trennen.

Beispiel 22 *Es seien a und b zwei nichtnegative,wachsende Folgen mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $a_n = 2^n b_n$. Es seien A und B Teilmengen von ℓ^1 mit*

$$A = \{x|\ \forall n \geq 2 : x(n) = 0\}$$

und

$$B = \{x|\ \forall n \geq 2 : x(1) \geq |a_n x(n) - b_n|\}$$

A und B sind abgeschlossene, unbeschränkte, konvexe, disjunkte Mengen. Es gibt keine abgeschlossene Hyperebene, die diese beiden Mengen trennt, d.h. es gibt kein stetiges Funktional ϕ mit $\phi \neq 0$, so dass

$$\sup_{x\in A} \phi(x) \leq \inf_{x\in B} \phi(x).$$

Die Folgen a und b sind so gewählt, dass der Abschluss von $B - A$ der Raum ℓ^1 ist. Dies impliziert, dass A und B nicht getrennt werden können: Falls nämlich A und B getrennt werden können, dann gibt es ein Funktional ϕ, so dass für alle $x \in A$ und $y \in B$ die Ungleichung $\phi(x) \leq \phi(y)$, also $\phi(y - x) \geq 0$ gilt. Damit würde $\phi(B - A) \subseteq [0, \infty)$ gelten. Falls aber der Abschluss von $B - A$ gleich ℓ^1 ist, so kann das nicht sein.

Dieudonné hat in ℓ_1 zwei beschränkte, abgeschlossene, konvexe, disjunkte Mengen konstruiert, die man nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene trennen kann.

Später werden wir sehen, dass ein Banachraum genau dann reflexiv ist, wenn es immer möglich ist, zwei beschränkte, abgeschlossene, konvexe, disjunkte Mengen zu trennen.

Beweis. e_i, $i \in \mathbb{N}$, sind die Einheitsvektoren, die an der i-ten Stelle eine 1 haben und sonst 0.

Die Menge A ist ein eindimensionaler Teilraum und damit sowohl konvex als auch abgeschlossen.

Die Mengen A und B sind disjunkt. Falls dem nicht so wäre, dann gäbe es ein $x \in A$ mit $x(n) = 0$ für $n \geq 2$ und

$$x(1) \geq |a_n x(n) - b_n| = |b_n|.$$

Dies bedeutet, dass die Folge b beschränkt ist, was nicht wahr ist.

Wir zeigen, dass B eine konvexe Menge ist. Es seien $x \in B$ und $y \in B$. Dann gilt für alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned} x(1) &\geq |a_n x(n) - b_n| \\ y(1) &\geq |a_n y(n) - b_n|. \end{aligned}$$

Deshalb gilt für alle $n \geq 2$ und t mit $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} tx(1) \quad &\geq |a_n tx(n) - tb_n| \\ (1-t)y(1) \quad &\geq |a_n(1-t)y(n) - (1-t)b_n|. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt, dass für alle $n \geq 2$

$$tx(1) + (1-t)y(1) \geq |a_n(tx(n) + (1-t)y(n)) - b_n|.$$

Also gilt $tx + (1-t)y \in B$. Wir zeigen, dass B abgeschlossen ist. Es sei x_k, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge in B, die gegen x_0 konvergiert. Wir zeigen, dass $x_0 \in B$. Wegen $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\lim_{k\to\infty} x_k(n) = x_0(n)$. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq 2$

$$x_k(1) \geq |a_n x_k(n) - b_n|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x_0(1) \quad &= \lim_{k\to\infty} x_k(1) \geq \lim_{k\to\infty} |a_n x_k(n) - b_n| \\ &= |a_n \lim_{k\to\infty} x_k(n) - b_n| = |a_n x_0(n) - b_n|. \end{aligned}$$

Damit gilt $x_0 \in B$. Wir zeigen nun, dass die beiden Mengen nicht durch eine abgeschlossene Hyperebene getrennt werden können. Wir nehmen an, wir können sie trennen. Es sei ϕ das Funktional. Dann muss

$$\phi(e_1) = 0$$

gelten. Falls $\phi(e_1) \neq 0$, dann folgt, dass $\phi(A) = \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, dass für alle $n \geq 2$

$$\phi(e_n) = 0$$

gilt. Es gilt für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n < k$

$$x = \max\left\{\max_{1\leq i\leq k} b_i, a_n - b_n\right\} e_1 + e_n + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i \ \in B$$

$$y = \max\left\{\max_{1\leq i\leq k} b_i, a_n + b_n\right\} e_1 - e_n + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i \ \in B.$$

Wir prüfen dies nach. Es sei $2 \leq \ell \leq k$ und $k \neq n$. Dann gilt $x(\ell) = 0$ und

$$|a_\ell x(\ell) - b_\ell| = b_\ell \leq \max\left\{\max_{1\leq i\leq k} b_i, a_n - b_n\right\} = x(1).$$

Für $\ell = n$ gilt $x(n) = 1$ und

$$|a_n x(n) - b_n| = a_n - b_n \leq \max\left\{\max_{1\leq i\leq k} b_i, a_n - b_n\right\} = x(1).$$

Für $\ell \geq k+1$ gilt $x(\ell) = 2^{-\ell}$ und

$$|a_\ell x(\ell) - b_\ell| = |a_\ell 2^{-\ell} - b_\ell| = 0 \leq x(1).$$

Genauso zeigen wir, dass $y \in B$. Weil $\phi(e_1) = 0$

$$\begin{aligned}\phi(x) \quad &= \phi\left(\max\left\{\max_{1\leq i\leq k} b_i, a_n - b_n\right\} e_1 + e_n + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i\right) \\ &= \phi\left(e_n + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i\right) = \phi(e_n) + \phi\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i\right).\end{aligned}$$

Da ϕ beschränkt ist, gilt $\sup_{i\in\mathbb{N}} |\phi(e_i)| \leq \|\phi\|$. Hieraus ergibt sich

$$|\phi(x) - \phi(e_n)| = \left|\phi\left(\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i\right)\right| \leq \|\phi\| \left\|\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} e_i\right\| = \|\phi\| 2^{-k}.$$

Ebenso erhalten wir

$$|\phi(y) + \phi(e_n)| \leq \|\phi\| 2^{-k}.$$

Falls $\phi(e_n) > 0$ gilt, dann können wir k so groß wählen, dass

$$\phi(x) > 0 \qquad \text{und} \qquad \phi(y) < 0$$

gelten. Da aber ϕ auf A den Wert 0 annimmt, kann man A und B nicht trennen. Der Fall $\phi(e_n) < 0$ wird genauso behandelt. Insgesamt haben wir nun gezeigt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\phi(e_n) = 0$$

gilt. Es folgt für $x \in \ell^1$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\phi(x)| = \left|\phi\left(\sum_{i=n}^{\infty} x_i e_i\right)\right| \leq \|\phi\| \left\|\sum_{i=n}^{\infty} x_i e_i\right\| = \|\phi\| \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert die rechte Seite und damit auch die linke Seite gegen 0. Damit gilt $\phi = 0$. Dies ist unwahr. $\square$

Korollar 5 *(i) Es sei X ein normierter Raum und $x_0 \in X$. Dann gibt es ein Funktional ϕ mit $\|\phi\| = 1$ und $\|x_0\| = \phi(x_0)$.*

(ii) Es sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum von X mit $Y \neq X$. Dann gibt es ein stetiges, lineares Funktional ϕ mit

$$\phi \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \forall x \in Y : \phi(x) = 0$$

Beweis. (i) Die Mengen $B(0, \|x_0\|)$ und $\{x_0\}$ sind konvex und disjunkt. Die erste Menge ist offen. Deshalb können wir den Satz von Hahn-Banach (Satz 19) anwenden. Es gibt ein Funktional ϕ, das die beiden Mengen trennt.

$$\sup_{\|x\| < \|x_0\|} \phi(x) \leq \phi(x_0)$$

Es folgt

$$\|\phi\| \|x_0\| \leq \phi(x_0) \leq \|\phi\| \|x_0\|$$

Das gesuchte Funktional ist dann $\frac{\phi}{\|\phi\|}$.

(ii) Es gibt ein $x_0 \notin Y$. $\{x_0\}$ ist eine kompakte Menge. Dann gibt es nach Satz 20 ein ϕ mit

$$\sup_{x \in Y} \phi(x) < \phi(x_0)$$

Wir zeigen nun, dass für alle $x \in Y$ gilt, dass $\phi(x) = 0$. Falls nicht, so würde $\phi(Y) = \mathbb{R}$ gelten, weil Y ein Teilraum ist. Dann kann ϕ aber Y und $\{x_0\}$ nicht trennen. $\square$

Eine Teilmenge H^+ ist ein Halbraum, wenn es ein Funktional ϕ mit

$$H^+ = \{x | \ \phi(x) \geq c\}$$

gibt. H^+ ist ein abgeschlossener Halbraum, wenn H^+ als Menge abgeschlossen ist. H^+ ist genau dann abgeschlossen, wenn ϕ stetig ist.

Korollar 6 *Es sei X ein normierter Raum und A eine abgeschlossene, konvexe Menge. Dann ist A der Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die A enthalten*

$$A = \bigcap_{A \subseteq H^+} H^+$$

Beweis. Es sei $x \notin A$. Dann sind $\{x\}$ und A konvexe, disjunkte Mengen, wobei die erste kompakt und die zweite abgeschlossen ist. Wir können den Satz von Hahn-Banach (Satz 20) anwenden. Es gibt eine Hyperebene die x und A strikt trennt. $\square$

Manchmal muss man disjunkte, konvexe Mengen durch ein Funktional trennen, von dem man nicht fordert, dass es stetig ist. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies nicht immer möglich ist. Das Beispiel stammt von V. Klee.

Wir wollen hier noch den Satz von Hahn-Banach für Vektorräume ohne eine Topologie zeigen. Wir lassen also hier alle Hyperebenen als Trennungshyperebenen zu. In topologischen Vektorräumen lassen wir nur abgeschlossene Hyperebenen zu.

$p : E \to \mathbb{R}$ ist schwach positiv homogen, wenn für alle $x \in E$ und alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Gleichung $rp(x) = p(rx)$ gilt.

Ein Punkt x einer Menge A heißt algebraisch innerer Punkt von A, wenn für alle Geraden, auf denen x liegt, gilt: Der Schnitt von A mit dieser Geraden enthält x als inneren Punkt.

Eine Menge heißt algebraisch offen, wenn jeder Punkt dieser Menge algebraisch innerer Punkt ist.

$U \subset E$ ist algebraisch-offen, wenn für beliebige $y, z \in E$ die Menge $\{k \in \mathbb{R}; y + kz \in U\}$ in $\mathbb{R}$ offen ist.

$U \subset E$ ist algebraisch-abgeschlossen, wenn für beliebige $y, z \in E$ die Menge $\{k \in \mathbb{R}; y+kz \in U\}$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.

Sei U eine konvexe Teilmenge von E. Der algebraische Abschluss von $\overline{U}^{alg}$ besteht aus allen $y \in E$, zu denen ein $x \in U$ existiert mit $[x, y] \setminus \{y\} \subset U$.

Satz 22 *Sei $p : E \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Sei G ein Teilraum von E und sei $\lambda \in G^*$ derart, dass $\lambda \leq p|_G$. Dann gibt es ein $\mu \in E^*$, derart dass $\mu|_G = \lambda$ und $\mu \leq p$.*

Beweis. Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller $\mathbb{R}$-wertigen linearen Abbildungen μ. $\mathcal{L}$ besitzt folgende Eigenschaften:

(i) $U := \mathrm{Def}(\mu)$ ist ein Teilraum von E , welcher G umfasst,

(ii) $\mu|_G = \lambda$,

(iii) $\mu \leq p|_U$.

Die Inklusion definiert dann eine Ordnungsstruktur auf $\mathcal{L}$ derart, dass jede vollständig geordnete Teilmenge $\mathfrak{C}$ von $\mathcal{L}$ die Abbildung $\bigcup \mathfrak{C}$ als obere Schranke besitzt. Nach dem *Zornschen Lemma* hat $\mathcal{L}$ ein maximales Element. Es bleibt noch zu zeigen:

$$\text{Ist } \mu \in \mathcal{L} \text{ maximal, so ist } U = E.$$

Zeige hierzu die Kontraposition:

$$\text{Ist } \mu \in \mathcal{L} \text{ derart, dass } U := \mathrm{Def}(\mu) \neq E, \text{ so ist } \mu \text{ nicht maximal.}$$

Es gelte $U \neq E$. Dann gilt $U \subsetneqq E$. Sei $w \in E \setminus U$. Setze $X := U + \mathbb{R}w$. Es gilt $U \cap \mathbb{R}w = \{0\}$. Definiere ein $\nu \in X^*$ durch $\nu|_U := \mu$ und $\nu(w) := r$, für ein noch zu spezifizierendes $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\mathrm{Def}(\nu) = X$ ist ein Teilraum von E. Dazu gilt: $\nu|_G = (\nu|_U)|_G = \mu|_G \underset{\mu \in \mathcal{L}}{=} \lambda$. Es bleibt noch zu klären, dass man r so wählen kann, dass gilt:

$$\nu \leq p|_X.$$

Für beliebige $u \in U$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
& \nu(u + sw) \leq\ p(u + sw) \\
\underset{\text{Linearität von } \nu}{\Leftrightarrow}\quad & \nu(u) + s\ \nu(w) \leq\ p(u + sw) \\
\underset{\nu(u)=\mu(u)}{\Leftrightarrow}\quad & \mu(u) + s\ \nu(w) \leq\ p(u + sw) \\
\underset{\nu(w)=r}{\Leftrightarrow}\quad & \mu(u) + s\ r \leq\ p(u + sw) \\
\Leftrightarrow\quad & sr \leq\ p(u + sw) - \mu(u).
\end{aligned}$$

Für $s = 0$ ist die Gleichung erfüllt. Damit gilt dann für beliebige $u \in U$ und $s \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\begin{array}{rrcl} & p(u - sw) - \mu(u) \geq (-s)r & \wedge & sr \leq p(u + sw) - \mu(u) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{-s}\Big(p(u - sw) - \mu(u)\Big) \leq r & \wedge & r \leq \frac{1}{s}\Big(p(u + sw) - \mu(u)\Big) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{s}\Big(\mu(u) - p(u + sw)\Big) \leq & r & \leq \frac{1}{s}\Big(p(u - sw) - \mu(u)\Big). \end{array}$$

Also ist r so zu wählen, dass gilt:

$$\iota := sup\{\frac{1}{s}\Big(\mu(u) - p(u - sw)\Big); u \in U, s \in \mathbb{R}_{>0}\} \leq r$$
$$r \leq inf\{\frac{1}{s}\Big(p(u + sw) - \mu(u)\Big); u \in U, s \in \mathbb{R}_{>0}\} =: \kappa.$$

Ein solches r existiert genau dann, wenn $\iota \leq \kappa$. Seien dazu $u, v \in U$ und $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rccc} & \frac{1}{a}\ \Big(\mu(u) - p(u - aw)\Big) & \leq & \frac{1}{b}\ \Big(p(v + bw) - \mu(v)\Big) \\ \Leftrightarrow & \mu(bu + av) & \leq & a\ p(v + bw) + b\ p(u - aw) \\ \Leftrightarrow & \mu\Big(\frac{b}{a+b}\ u + \frac{a}{a+b}\ v\Big) & \leq & \frac{a}{a+b}\ p(v + bw) + \frac{b}{a+b}\ p(u - aw) \end{array}$$

Setze $t := \frac{a}{a+b}$, damit ist $\frac{b}{a+b} = 1 - t$. Dadurch ist die obige Gleichung äquivalent zu

$$\mu\Big(tv + (1 - t)u\Big) \quad \leq \quad t\ p(v + bw) + (1 - t)\ p(u - aw).$$

Nach Bedingung *(iii)* gilt:

$$\mu\Big(tv + (1 - t)u\Big) \quad \leq \quad p\Big(tv + (1 - t)u\Big).$$

Somit bleibt noch zu zeigen:

$$p\Big(tv + (1 - t)u\Big) \quad \leq \quad t\ p(v + bw) + (1 - t)\ p(u - aw).$$

Mit der Konvexität von p gilt:

$$\begin{array}{rcl} p\Big(tv + (1 - t)u\Big) & = & p\Big(tv + (1 - t)u + \underbrace{\big(tb - (1 - t)a\big)}_{=0}w\Big) \\ & = & p\Big(t(v + wb) + (1 - t)(u - aw)\Big) \\ & \underset{p\ konvex}{\leq} & t\ p(v + wb) + (1 - t)\ p(u - aw). \end{array}$$

□

Lemma 103 *Sei U eine nicht-leere Teilmenge von E mit $0 \in U$. Dann wird durch*

$$||x||_U = inf\{t \in \mathbb{R}_{>0}; x \in tU\}$$

eine schwach positiv-homogene Funktion $||\cdot|| : E \longrightarrow [0, \infty]$, das sogenannte Minkowski-Funktional von U, definiert.

(i) Ist U absorbant, so ist $||\cdot||_U$ endlich.

(ii) Ist U konvex, so ist $||\cdot||_U$ sublinear und auch konvex.

Beweis. (i) Es gelte U ist absorbant, dass heißt $\bigcup_{t>0} tU = E$. Daher ergibt sich, dass $||\cdot||_U$ endlich ist.

(ii) Es gelte U ist konvex. Dann gilt für beliebige $x, y \in E$ und $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x \in sU$ und $y \in tU$:

$$x + y = (s+t)\Big(\frac{s}{s+t}\ \frac{x}{s} + (1 - \frac{s}{s+t})\ \frac{y}{t}\Big) \in (s+t)U.$$

Es gilt $\frac{s}{s+t} \in [0,1]$, da $s, t \in \mathbb{R}_{>0}$ sind. Und $(\frac{s}{s+t}\frac{x}{s} + (1 - \frac{s}{s+t})\frac{y}{t})$ ist die Verbindungsstrecke von x und y in U.

$$\{s \in \mathbb{R}_{>0}; x \in sU\} + \{t \in \mathbb{R}_{>0}; y \in tU\} \subset \{r \in \mathbb{R}_{>0}; (x+y) \in rU\}.$$

Es gilt durch den Übergang zum Infimum auf beiden Seiten:

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Daher ist p sublinear. Seien $x, y \in E$ und sei $t \in [0,1]$. Dann gilt:

$$p\Big(tx + (1-t)y\Big) \leq p(tx) + p\big((1-t)y\big) = t\ p(x) + (1-t)\ p(y).$$

□

Lemma 104 *Sei M eine algebraisch-offene Teilmenge von E. Dann gilt:*

(i) $0 \in M \Rightarrow M$ *absorbant.*

(ii) Für jedes $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und jede Teilmenge N von E ist $kM + N$ algebraisch-offen.

(iii) Für jedes $\xi \in E^*$ mit $\xi \neq 0$ ist $\xi(M)$ offen in $\mathbb{R}$.

Beweis. (i) Es gelte: $0 \in M$. Sei $x \in E$. Die Menge $U := \{t \in \mathbb{R}; 0 + tx \in M\}$ enthält die 0 und ist offen. Daher enthält U ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $\epsilon x \in U$. Also ist $x \in \frac{1}{\epsilon}U$.

(ii) Sei $v \in kM + N$. Wähle $m \in M, n \in N$ und $k \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $v = km + n$. Seien $y, z \in E$.
Zu zeigen: $L := \{l \in \mathbb{R}; y + lz \in kM + N\}$ ist offen.
Sei dazu $l_0 \in L$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & y + l_0 z & = & km + n \\ \Leftrightarrow & m & = & \frac{1}{k} l_0 z + \frac{1}{k}(y - n). \end{array}$$

Da M offen ist, existiert $U := \{u \in \mathbb{R}; y' + uz' \in M\}$ offen, für beliebige $y', z' \in E$. Setze $z' := \frac{1}{k}z$ und $y' := \frac{1}{k}(y-n)$. Dann gilt:

$$y' + uz' = \frac{1}{k}(y-n) + u\frac{1}{k}z.$$

Also folgt:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{k}(y-n) + u\frac{1}{k}z & \in & M \\ y - n + uz & \in & kM \\ y + uz & \in & kM + n \subset kM + N. \end{array}$$

Daher ist $u \in L$ und es gilt $U \subset L$.

(iii) Sei $v \in M$. Seien $w \in \xi^{-1}(1)$ und $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass $v + tw \in M$ ist für jedes $t \in K_{\mathbb{R}}(0, \epsilon)$. Dann liegt $K_{\mathbb{R}}\big(\xi(v), \epsilon\big) = \xi(v) + K_{\mathbb{R}}(0, \epsilon)$ in $\xi(M)$. □

Satz 23 *Seien A, B disjunkte konvexe Teilmengen von E. Falls dann B einen algebraisch-inneren Punkt besitzt, so gibt es ein $\xi \in E^*$ derart, dass*

$$\inf\{\xi(b)|b \in B\} \geq sup\{\xi(a)|a \in A\}$$

Falls $b \in B$ ein algebraisch innerer Punkt ist, so gilt

$$\xi(b) > sup\{\xi(a)|a \in A\}$$

Beweis. O.B.d.A. seien A und B nicht-leer. Seien $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ fixiert. Setze $v_0 := b_0 - a_0$. Definiere zusätzlich $C := A - B + v_0$. C ist eine konvexe Menge. Dann gilt nach *Lemma 4.1 (ii)* $p := ||\cdot||_C$ ist konvex. Nach *Lemma 4.2 (ii)* ist C algebraisch-offen. Dazu ist $0 \in C$, da $(-v_0) \in A - B$. Damit folgt nun mit *Lemma 4.2 (i)* C ist absorbant. Damit folgt wiederum mit *Lemma 4.1 (i)* $||\cdot||_C$ ist endlich. Setze $G := \mathbb{R}v_0$. Definiere $\lambda \in G^*$ durch $\lambda(rv_0) := rp(v_0)$ für jedes $r \in \mathbb{R}$. Weil p schwach positiv-homogen ist, gilt für jedes $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:

$$\lambda(rv_0) = rp(v_0) = p(rv_0).$$

Da $p \geq 0$ ist, gilt die Ungleichung $\lambda(rv_0) \leq p(rv_0)$ für jedes $r \in \mathbb{R}_{<0}$. Man findet nun nach *Satz 3.1 - Fortsetzungs-Satz von Hahn-Banach* ein $\xi \in E^*$ derart, dass $\xi \leq p$ und $\xi(v_0) = p(v_0)$.
Seien $a \in A$ und $b \in B$. Es gilt $v_0 \notin C$, da A und B disjunkt sind. Daher gilt $p(v_0) \geq 1$. Für alle $c \in C$ gilt jedoch $p(c) \leq 1$. Damit ergibt sich folgende Überlegung:

$$\xi(a) - \xi(b) = \xi(a - b + v_0) - \xi(v_0) \leq p(a - b + v_0) - p(v_0) \leq 0$$

Das heißt, dass $\xi(a) \leq \xi(b)$. Daher gilt auch $sup\{\xi(a); a \in A\} \leq inf\{\xi(b); b \in B\}$. $\xi(B)$ ist nach *Lemma 4.2(iii)* offen, daher wird das Infimum nicht angenommen, und die Behauptung folgt. □

Lemma 105 *Sei $\xi \in E^*$ mit $\xi \neq 0$. Sei $r \in \mathbb{R}$ und sei $\{x \in E; \xi(x) \geq r\} =: B$. Dann gilt:*
(i) B ist algebraisch-abgeschlossen.
(ii) Sei $A \subset B$. Dann ist auch $\overline{A}^{alg} \subset B$.

Beweis. (i) Sei $x \in \overline{B}^{alg}$. Wähle ein $b \in B$ mit $[x, b] \setminus \{x\} \subset B$. Sei $t \in]0, 1]$. Dann gilt:

$$t\xi(b) + (1 - t)\xi(x) = \xi(tb + (1 - t)x) \geq r.$$

Durch Betrachten des Grenzwertes folgt:

$$t\xi(b) + (1 - t)\xi(x) \quad \longrightarrow \quad \xi(x) \qquad \text{für } t \;\rightarrow\; 0.$$

Damit gilt $\xi(x) \geq r$. Also ist $x \in B$. Damit gilt B ist algebraisch-abgeschlossen.
(ii) Es gilt $A \subset B$, also auch $\overline{A}^{alg} \subset \overline{B}^{alg} = B$. □

Das folgende Beispiel stammt von *V. Klee*. Es zeigt, dass es nicht immer möglich ist zwei disjunkte konvexe Mengen durch Funktionale zu trennen. In dem Beispiel wird auf zwei disjunkte konvexe Mengen zurückgegriffen, deren Algebraischer Abschluss jeweils schon der ganze Raum ist.

Beispiel 23 *Es sei $P = \mathbb{R}[x]$. Es sei G die Menge aller Polynome, deren führender Koeffizient echt größer als 0 ist. K sei das Komplement von G. Dann gilt:*

(i) G, K sind konvex.

(ii) $G \cap K = \varnothing$.

(iii) $\overline{G}^{alg} = P$ und $\overline{K}^{alg} = P$. Damit gilt zusätzlich: $\overline{G}^{alg} \cap \overline{K}^{alg} = P$.

(iv) G und K lassen sich durch kein von 0 verschiedenes Funktional trennen.

Beweis. (i) Seien $Q, R \in G$ und sei $t \in [0,1]$. Dann gilt:

$$tR + (1-t)Q \in G.$$

Dieses ergibt sich sofort durch Unterscheidung der Fälle: grad $R >$ grad Q, grad $R <$ grad Q und grad $R =$ grad Q. K ist konvex folgt analog.

(ii) Folgt direkt aus der Definition.

(iii) Sei $R \in P$. Wähle $n >$ grad R. Sei $t \in [0,1[$. Der führende Koeffizient von

$$tR + (1-t)X^n.$$

ist $(1-t) > 0$, daher ist $tR + (1-t)X^n \in G$. Also gilt $\overline{G}^{alg} = P$. Sei $Q \in P$. Wähle $n >$ grad Q. Sei $t \in [0,1[$. Der führende Koeffizient von

$$tQ - (1-t)X^n.$$

ist $\big(-(1-t)\big) < 0$, daher ist $tQ - (1-t)X^n \in K$. Also gilt $\overline{K}^{alg} = P$.

(iv) Beweis durch Widerspruch. Annahme: G und K lassen sich durch ein von 0 verschiedenes Funktional trennen. Dann findet man ein $r \in \mathbb{R}$ und ein $\xi \in P^*$ derart, dass

$$\begin{array}{rrcl} & G & \subset & \{x \in P; \xi(x) \geq r\} \\ \text{und} & K & \subset & \{x \in P; \xi(x) \leq r\}. \end{array}$$

Dann gilt nach *Lemma 5.1* auch:

$$\begin{array}{rrcl} & \overline{G}^{alg} & \subset & \{x \in P; \xi(x) \geq r\} \\ \text{und} & \overline{K}^{alg} & \subset & \{x \in P; \xi(x) \leq r\}. \end{array}$$

Es gilt jedoch $\overline{G}^{alg} = P$, wobei $\{x \in P; \xi(x) \geq r\} \neq P$, es sei denn $\xi = 0$. Also lassen sich G und K durch kein von 0 verschiedenes Funktional trennen.
□

Wir möchten hier noch auf eine andere Beweisstrategie hinweisen. Man kann zeigen: Sind A_1 und A_2 disjunkte konvexe echte Teilmengen von E, so gibt es zwei in E komplementäre konvexe Teilmengen C_1 und C_2 mit $C_1 \supset A_1$ und $C_2 \supset A_2$.
Sind C_1 und C_2 komplementäre konvexe echte Teilmengen von E, so ist $\overline{C_1}^{alg} \cap \overline{C_2}^{alg}$ gleich E oder gleich einer reellen Hyperebene. Falls $\overline{C_1}^{alg} \cap \overline{C_2}^{alg}$ nicht gleich dem ganzen Raum ist, dann ist es eine trennende Hyperebene. Wie wir gesehen haben, gibt es tatsächlich den Fall, dass $\overline{C_1}^{alg} \cap \overline{C_2}^{alg}$ der ganze Raum ist.

3.6 Dualraum und adjungierte Abbildung

Satz 24 *Es sei X ein reeller, normierter Raum. Für $x \in X$ definieren wir $\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ durch*

$$\hat{x}(x^*) = x^*(x)$$

Dann ist $\hat{x}$ ein stetiges Funktional auf X^* und $\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. Die Abbildung $I : X \to X^{**}$ mit $I(x) = \hat{x}$ ist eine lineare Isometrie.

$\hat{x}$ wird also dadurch definiert, dass man die Rollen von x und x^* vertauscht.

Beweis. Wir zeigen, dass $\hat{x}$ ein lineares, stetiges Funktional ist.

$$\hat{x}(x^* + y^*) = (x^* + y^*)(x) = x^*(x) + y^*(x) = \hat{x}(x^*) + \hat{x}(y^*)$$

$$\hat{x}(tx^*) = tx^*(x) = t\hat{x}(x^*)$$

Das Funktional ist beschränkt.

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \sup_{\|x^*\|=1} |\hat{x}(x^*)| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)| \leq \sup_{\|x^*\|=1} \|x^*\|_{X^*} \|x\|_X = \|x\|_X$$

Nach Korollar 5 folgt, dass es für jedes $x \in X$ ein Funktional $x^* \in X^*$ gibt, so dass $\|x^*\|_{X^*} = 1$ und $x^*(x) = \|x\|$ gelten. Hieraus folgt

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} \geq \hat{x}(x^*) = x^*(x) = \|x\|.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \|x\|_X.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Abbildung I linear ist.

$$\widehat{x + y}(x^*) = x^*(x + y) = x^*(x) + x^*(y) = \hat{x}(x^*) + \hat{x}(y^*)$$

$$\widehat{tx}(x^*) = x^*(tx) = tx^*(x) = t\widehat{x}(x^*)$$

□

Wir sagen, dass ein Banachraum X reflexiv ist, falls die Abbildung I surjektiv ist. Insbesondere bedeutet dies, dass X und der Bidual X^{**} isometrisch isomorph sind. Dies heißt jedoch nicht, dass ein Banachraum reflexiv ist, wenn er und sein Bidual isometrisch isomorph sind. Ein Beispiel hierzu ist der Raum von James (Satz 62).

Lemma 106 *Es sei X ein Banachraum, dessen Dualraum separabel ist. Dann ist X auch separabel.*

Beweis. Mit X^* ist auch die Einheitssphäre $\{x^* | \|x^*\| = 1\}$ separabel. Es sei x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, eine dichte Folge in $\{x^* | \|x^*\| = 1\}$. Zu jedem x_n^* existiert ein x_n mit $\|x_n\| = 1$ und $x_n^*(x_n) \geq \frac{1}{2}$. Es reicht nun zu zeigen, dass die lineare Hülle der Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, in X dicht ist. Falls die lineare Hülle nicht dicht in X ist, dann liegt sie in einer abgeschlossenen Hyperebene von X, weil sie ein Teilraum ist. Dann gibt es ein Funktional x^* mit $\|x^*\| = 1$, das nicht 0 ist und das auf der linearen Hülle gleich 0 ist. Es existiert ein n_0 mit $\|x^* - x_{n_0}^*\| \leq \frac{1}{4}$. Damit erhalten wir

$$\frac{1}{2} \leq |x_{n_0}^*(x_{n_0})| = |x_{n_0}^*(x_{n_0}) - x^*(x_{n_0})| \leq \|x_{n_0}^* - x^*\| \|x_{n_0}\| \leq \frac{1}{4}$$

□

Beispiel 24 *(i) Der Dualraum von c_0 ist isometrisch isomorph zu ℓ_1. Die Abbildung $I : c_0^* \to \ell^1$ mit*

$$I(\phi) = (\phi(e_i))_{i=1}^{\infty}$$

ist ein isometrischer Isomorphismus. Es gilt für alle $y \in \ell_1$

$$(I^{-1}(y))(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

(ii) Der Dualraum von ℓ_1 ist isometrisch isomorph zu ℓ_∞.
(iii) c_0 und ℓ_1 sind nicht reflexiv.

Beweis. (iii) Der Bidualraum von c_0 ist isometrisch isomorph zu ℓ_∞. Da c_0 separabel ist und ℓ_∞ nicht separabel ist, sind diese Räume nicht isomorph.

Nach Lemma 106 ist der Dualraum von ℓ_∞ nicht separabel. Da ℓ_1 separabel ist, kann ℓ_1 nicht isomorph zu seinem Bidualraum sein. □

Beispiel 18 zeigt bereits, dass ℓ_1 nicht reflexiv ist. Die dort angegebenen Funktionale auf ℓ_∞ lassen sich nicht durch Elemente aus ℓ_1 darstellen.

Korollar 7 *(Dualraum von ℓ_∞) Es sei $\mathcal{P}(I)$ die Potenzmenge von I. $\mathcal{BV}(I)$ sei der Vektorraum aller Funktionen $\phi : \mathcal{P}(I) \to \mathbb{R}$, die endlich additiv sind, d.h. für alle endlichen Folgen paarweise disjunkter Mengen M_i, $i = 1, \ldots, n$ gilt*

$$\phi\left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \phi(M_i)$$

und für die

$$V(\phi) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\phi(M_i)| \,\middle|\, M_i, i = 1, \ldots, n \text{ sind paarweise disjunkt} \right\}$$

$V(\phi)$ heißt Variation von ϕ und V ist eine Norm auf $\mathcal{BV}(I)$.

Es sei Y der Teilraum von ℓ^∞, der aus allen Vektoren der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{M_i} \qquad\qquad M_i, i = 1, \ldots, n \text{ paarweise disjunkt}$$

Y ist ein dichter Teilraum von ℓ^∞. Die Abbildung $J : (\ell^\infty)^* \rightarrow \mathcal{BV}(I)$, die durch

$$(J(x^*))(M) = x^*(\chi_M)$$

gegeben ist, ist ein isometrischer Isomorphismus.

Korollar 8 *(i) Jeder separable Banachraum ist zu einem Teilraum von ℓ_∞ isometrisch.*
(ii) Der Dualraum eines separablen Banachraumes ist isometrisch isomorph zu einem Teilraum von ℓ_∞.
(iii) Jeder separable Banachraum ist ein Quotientenraum von ℓ_1.

Beweis. (i) Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine dichte Folge in X. Nach Korollar 5 gibt es zu jedem x_n ein Funktional x_n^* mit $\|x_n^*\| = 1$ und $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$. Wir definieren $I : X \rightarrow \ell_\infty$ durch

$$I(x) = (x_n^*(x))_{n=1}^\infty$$

Es gilt

$$\|I(x)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| \leq \|x\|$$

Andererseits gibt es zu jedem $x \in X$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x_k\| < \epsilon$. Somit

$$\|I(x)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n^*(x)| \geq |x_k^*(x)| \geq |x_k^*(x_k)| - |x_k^*(x_k - x)| \geq \|x_k\| - \epsilon \geq \|x\| - 2\epsilon$$

(ii) Es sei X ein Banachraum und X^* sein Dualraum. Es sei x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine dichte Folge in der Menge $\{x | \|x\| = 1\}$. Wir definieren $I : X^* \rightarrow \ell_\infty$ durch

$$I(x^*) = (x^*(x_i))_{i=1}^\infty$$

Es gilt

$$\|I(x^*)\|_\infty = \|(x^*(x_i))_{i=1}^\infty\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x^*(x_i)| = \|x^*\|$$

□

Es seien X und Y Banachräume und $T : X \rightarrow Y$ ein stetiger, linearer Operator. Der zu T adjungierte Operator $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ bildet das Funktional y^* auf das Funktional $y^* \circ T$ ab. Es gilt also für alle $x \in X$ und alle $y^* \in Y^*$

$$(T^*(y^*))(x) = y^*(T(x)).$$

Lemma 107 *(i) Es seien X und Y normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ ein stetiger, linearer Operator. Dann ist T^* ein stetiger, linearer Operator und $\|T\| = \|T^*\|$.*
(ii) Es seien X, Y und Z normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ und $S : Y \rightarrow Z$ stetige, lineare Abbildungen. Dann gilt $(ST)^* = T^*S^*$.

Beweis. (i) Mit Korollar 5 folgt, dass es zu $T(x)$ ein Funktional y^* mit $\|y^*\| = 1$ und $y^*(T(x)) = \|T(x)\|$ gibt. Deshalb

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\|y^*\|\leq 1} |y^*(T(x))| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |y^*(T(x))| \\ &= \sup_{\|y^*\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |(T^*(y^*))(x)| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} \|T^* y^*\| = \|T^*\|\end{aligned}$$

(ii)

$$(ST)^*(z^*) = z^*(ST) = (z^*S)T = (S^*(z^*))T = T^*(S^*(z^*))$$

□

Lemma 108 *Es seien X und Y Banachräume und $I : X \to Y$ ein stetiger Isomorphismus, dessen Inverse ebenfalls stetig ist. Dann sind auch X^* und Y^* isomorph.*

Man beachte, dass die Umkehrung nicht richtig ist. Falls X^* und Y^* isomorph sind, so müssen X und Y nicht notwendig isomorph sein. Ein Beispiel hierfür sind die Räume c_0 und $C(\omega^\omega)$. Der Dualraum von beiden Räumen ist isometrisch isomorph zu ℓ_1.

Beweis. Nach Lemma 107 gilt $\|I\| = \|I^*\|$ und $\|I^{-1}\| = \|I^{-1*}\|$. Außerdem gilt nach Lemma 107, dass $I^* I^{-1*} = (I^{-1}I)^*$ und somit ist I^{-1*} die Inverse zu I^*. □

Es sei Y ein Teilraum von X. Dann bezeichnen wir die Abbildung $I : Y \to X$, die jedem Element $y \in Y$ dasselbe Element in X zuordnet, als Einbettung. Die duale Abbildung $I^* : X^* \to Y^*$ ist eine Quotientenabbildung. Wir bezeichnen den Teilraum $Y^\perp = \{x^* \in X^* | \forall y \in Y : x^*(y) = 0\}$ als Orthogonalraum von Y. Dann ist I^* gleich der Quotientenabbildung von X^* nach $X^*/Y^\perp$.

Lemma 109 *Es sei X ein normierter Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum. Dann gilt*
(i) $(X/Y)^*$ ist isometrisch isomorph zu $Y^\perp$.
(ii) Y^* ist isometrisch isomorph zu $X^*/Y^\perp$.

Beweis. (i) Es sei $q : X \to X/Y$ die Quotientenabbildung. Der Isomorphismus $J : (X/Y)^* \to Y^\perp$ ist durch $J(\phi) = \phi \circ q$ gegeben.

J ist wohldefiniert, weil $\phi \circ q$ eine stetiges, lineares Funktional auf X ist und für alle $y \in Y$

$$(\phi \circ q)(y) = \phi(q(y)) = \phi([0]) = 0$$

Also gilt $\phi \circ q \in Y^\perp$.

J ist injektiv, weil für alle $\phi, \psi \in (X/Y)^*$ die Gleichung $J(\phi) = J(\psi)$, genau dann gilt, wenn $\phi \circ q = \psi \circ q$ gilt. Dies wiederum gilt genau dann, wenn für alle $x \in X$ die Gleichung $\phi(q(x)) = \psi(q(x))$ gilt. Dies bedeutet aber $\phi = \psi$.

J ist surjektiv: Zu gegebenem $x^* \in Y^\perp$ definieren wir $\phi_{x^*} \in (X/Y)^*$ durch

$$\phi_{x^*}([x]) = x^*(x)$$

ϕ_{x^*} ist wohldefiniert, weil aus $[x] = [y]$ folgt, dass $x^*(x) = x^*(y)$ gilt. Dies gilt, weil $[x - y] = [0]$ die Gleichung $x^*(x - y) = 0$ impliziert.

ϕ_{x^*} ist stetig:

$$\sup_{\|[x]\|\leq 1} |\phi_{x^*}([x])| = \sup_{\|[x]\|\leq 1} |x^*(x)|$$

In jeder Klasse $[x]$ und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein z mit $\|[x]\| + \epsilon \geq \|z\|$. Also

$$|x^*(x)| = |x^*(z)| \leq \|x^*\|\|z\| \leq \|x^*\|(\|[x]\| + \epsilon)$$

Damit

$$\|\phi_{x^*}\| \leq \|x^*\|(1 + \epsilon)$$

und schließlich

$$\|\phi_{x^*}\| \leq \|x^*\|$$

J ist Isometrie.

$$\|J(\phi)\| = \|\phi \circ q\| \leq \|\phi\|\|q\| = \|\phi\|$$

Nun die inverse Ungleichung.

$$\|J(\phi)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |J(\phi)(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\phi(q(x))|$$

Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $[y] \in X/Y$ mit $\|[y]\| \leq 1$ und $|\phi([y])| \geq \|q\| - \epsilon$. Außerdem gibt es für alle $\epsilon > 0$ und für alle $[y] \in X/Y$ ein $x \in [y]$ mit

$$\|[y]\| \geq \|x\| - \epsilon$$

Wir wählen ein solches x.

$$\|J(\phi)\| \geq |\phi(\frac{x}{\|x\|})| \geq \frac{1}{1+\epsilon}|\phi(q(x))| \geq \frac{1}{1+\epsilon}(\|\phi\| - \epsilon)$$

(ii) Es sei hier $q : X^* \to X^*/U^\perp$ die Quotientenabbildung. Hier wählen wir den Isomorphismus $B : U^* \to X^*/U^\perp$, der durch $B(u^*) = q(u^*)$ gegeben ist. Offensichtlich gilt

$$\|B(u^*)\| = \|q(u^*)\| \leq \|u^*\|$$

□

Lemma 110 *(Dixmier) Es sei X ein Banachraum. Dann ist X^* ein komplementierter Teilraum von X^{***}.*

Beweis. X ist ein abgeschlossener Teilraum von X^{**}. Die gesuchte Projektion bildet ein Funktional x^{***} auf dessen Einschränkung auf X ab $x^{***}_{|X}$.

Wir wollen dies nun präziser fassen. Es seien

$$i_X : X \to X^{**} \qquad \forall x \in X \forall x^* \in X^* : \ (i_X(x))(x^*) = x^*(x)$$

$$i_{X^*} : X^* \to X^{***} \qquad \forall x^* \in X^* \forall x^{**} \in X^{**} : \ (i_{X^*}(x^*))(x^{**}) = x^{**}(x^*)$$

die natürlichen Einbettungen in den Bidualraum und den Dualraum des Bidualraums. Natürlich ist bei der Aussage des Satzes gemeint, dass $\mathrm{Bild}(i_{X^*})$ in X^{***} komplementiert ist. Die gesuchte Projektion ist $P = i_{X^*} \circ i_X^*$. Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{Bild}(P) = i_{X^*}(X^*)$ und dass für alle $w \in \mathrm{Bild}(P)$ die Gleichung $P(w) = w$ gilt.

Es gilt
$$\mathrm{Bild}(P) = \mathrm{Bild}(i_{X^*} \circ i_X^*) \subseteq \mathrm{Bild}(i_{X^*})$$
Es sei nun $x^{***} \in \mathrm{Bild}(i_{X^*})$, d.h. es gibt ein $x^* \in X^*$ mit $i_{X^*}(x^*) = x^{***}$. Dann gilt für alle $x \in X$
$$(i_{X^*}(x^*) \circ i_X)(x) = (i_X(x))(x^*) = x^*(x)$$
Somit gilt $x^* = i_{X^*}(x^*) \circ i_X$. Damit erhalten wir
$$\begin{aligned} P(i_{X^*}(x^*)) &= (i_{X^*} \circ i_X^*)(i_{X^*}(x^*)) \\ &= i_{X^*}(i_X^*(i_{X^*}(x^*))) = i_{X^*}((i_{X^*}(x^*) \circ i_X) = i_{X^*}(x^*) \end{aligned}$$
□

Satz 25 *(Schauder) Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein stetiger, linearer Operator. T ist genau dann kompakt, wenn T^* kompakt ist.*

Juliusz Pawel Schauder (21.9.1899- Sept. 1943), polnischer Mathematiker jüdischer Abstammung.

Beweis. Es sei T kompakt. Wir wollen zeigen, dass $\overline{T^*(\overline{B_{Y^*}})}$ kompakt ist. Dazu betrachten wir eine Folge $x_n^* \in \overline{T^*(\overline{B_{Y^*}})}$ und zeigen, dass sie eine konvergente Teilfolge besitzt. Zu der Folge x_n^*, $n \in \mathbb{N}$, existiert eine beschränkte Folge $y_n^* \in Y^*$, $n \in \mathbb{N}$, mit $x_n^* = T^*(y_n^*)$, $n \in \mathbb{N}$.

Weil T kompakt ist, ist $\overline{T(\overline{B_X})}$ eine kompakte Menge. Deshalb ist $\overline{T(\overline{B_X})}$ mit der durch die Norm gegebenen Metrik ein kompakter, metrischer Raum und $f_n : \overline{T(\overline{B_X})} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(y) = y_n^*(y)$ ist eine beschränkte, gleichstetige Menge. Wir zeigen dies. Es gilt
$$|f_n(y) - f_n(z)| = |y_n^*(y) - y_n^*(z)| \leq \|y_n^*\| \|y - z\|$$
Nach dem Satz von Arzela-Ascoli (Korollar 57) ist der Abschluss dieser Menge im Raum aller stetigen Funktionen kompakt und deshalb gibt es eine Teilfolge f_{n_k}, $k \in \mathbb{N}$, die konvergiert. Insbesondere ist diese Folge eine Cauchy-Folge und es gilt
$$\begin{aligned} \|f_{n_k} - f_{n_\ell}\|_\infty &= \sup_{y \in \overline{T(\overline{B_X})}} |f_{n_k}(y) - f_{n_\ell}(y)| \\ &= \sup_{y \in \overline{T(\overline{B_X})}} |y_{n_k}^*(y) - y_{n_\ell}^*(y)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |y_{n_k}^*(Tx) - y_{n_\ell}^*(Tx)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |(T^*(y_{n_k}^*))(x) - (T^*(y_{n_\ell}^*))(x)| \\ &= \|T^*(y_{n_k}^*) - T^*(y_{n_\ell}^*)\| \end{aligned}$$

Also ist $T^*(y^*_{n_k})$, $k \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge. Sie konvergiert, weil X^* vollständig ist.

Wir zeigen nun die Umkehrung. Da T^* kompakt ist folgt mit dem eben gezeigten, dass T^{**} kompakt ist. Wir wissen, dass X isometrisch isomorph zu einem Teilraum von X^{**} und Y zu einem Teilraum von Y^{**} ist. Die Idee ist, dass wir, wenn wir T^{**} auf X einschränken, T erhalten.

Es sei $i_X : X \to X^{**}$ die Einbettung. Dann ist $T^{**} \circ i_X$ nach Lemma 96 kompakt, weil T^{**} kompakt ist. Weiter gilt, dass

$$T^{**} \circ i_X = i_Y \circ T \tag{3.3}$$

Dies gilt, weil

$$(T^{**}(i_X(x)))(y^*) = (i_X(x))(T^*(y^*)) = (T^*(y^*))(x) = y^*(Tx) = (i_Y(Tx))(y^*)$$

Also ist $i_Y \circ T$ eine kompakte Abbildung. Somit ist $\overline{i_Y \circ T(\overline{B_X})}$ eine kompakte Menge. Da $T(\overline{B_X}) \subseteq Y$, gilt $i_Y \circ T(\overline{B_X}) \subseteq i_Y(Y)$. Da i_Y eine Isometrie ist und Y vollständig, folgt

$$\overline{(i_Y \circ T)(\overline{B_X})} \subseteq \overline{i_Y(Y)} = i_Y(Y)$$

Da i_Y als Isometrie kompakte Mengen auf kompakte abbildet, ist

$$i_Y(\overline{T(\overline{B_X})}) = \overline{(i_Y \circ T)(\overline{B_X})}$$

eine kompakte Menge. $\square$

Beispiel 25 *(Hilbert Matrix) Für alle p, q mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und alle nichtnegativen Folgen $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ und $b = (b_n)_{n=1}^\infty$ gilt*

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \frac{a_n b_m}{n+m} < \pi \csc\left(\frac{\pi}{p}\right) \|a\|_p \|b\|_q$$

Man kann diese Ungleichung auch so betrachten: Die Abbildung $H : \ell_p \to \ell_p$

$$H(a) = \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n+m}\right)_{m=1}^\infty$$

ist stetig und $\|H\| \le \pi \csc\left(\frac{\pi}{p}\right)$.

Um dieses Beispiel zu beweisen, brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 111 *Es sei $0 < a < 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten*

$$\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(n+m)(m/n)^a} < \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)x^a} dx < \frac{n^{a-1}}{1-a} + \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(n+m)(m/n)^a} \tag{3.4}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)x^a} dx = \pi \csc(a\pi) \tag{3.5}$$

Beweis von Lemma 111. Wir beweisen (3.4). Für alle $x \geq 0$ gilt

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1+(m/n))(m/n)^a}\chi_{(\frac{m-1}{n},\frac{m}{n})} \leq \frac{1}{(1+x)x^a}$$

und für alle $x \geq 1/n$ gilt

$$\frac{1}{(1+x)x^a} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1+(m/n))(m/n)^a}\chi_{(\frac{m}{n},\frac{m+1}{n})}$$

Wir müssen noch beachten, dass

$$\int_0^t \frac{1}{(1+x)x^a}dx \leq \frac{t^{1-a}}{1-a}$$

Wir zeigen (3.5). Wir setzen $1+x=1/t$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)x^a}dx = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a}dt = B(a,1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

□

Beweis von Beispiel 25.

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n b_m}{n+m}\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+m)^{1/p}(m/n)^{1/(pq)}}\frac{b_m}{(n+m)^{1/q}(n/m)^{1/(pq)}}\end{aligned}$$

Wir wenden nun die Hölder Ungleichung auf die Doppelsumme an (Es handelt sich ja um abzählbar viele Summanden). Der letzte Ausdruck ist also kleiner oder gleich

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|a_n|^p}{(n+m)(m/n)^{1/q}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|b_m|^q}{(n+m)(n/m)^{1/p}}\right)^{\frac{1}{q}}\\ =&\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)(m/n)^{1/q}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|b_m|^q\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)(n/m)^{1/p}}\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Mit Lemma 111 erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n b_m}{n+m} < \pi(\csc(\tfrac{\pi}{q}))^{\frac{1}{p}}(\csc(\tfrac{\pi}{p}))^{\frac{1}{q}}\|a\|_p\|b\|_q$$

Wegen $\csc(\frac{\pi}{p}) = \csc(\frac{\pi}{q})$ folgt die Abschätzung. □

3.7 Fortsetzungseigenschaft

Wir wollen hier auf die Frage eingehen, warum der Satz von Hahn-Banach nicht für lineare Abbildungen von einem Teilraum eines Banachraumes in einen Banachraum gilt. Wir sagen, dass ein Banachraum X die t-Fortsetzungseigenschaft besitzt, wenn für alle Banachräume Y und Z mit $Y \subseteq Z$ und alle Operatoren $T \in L(Y, X)$ ein Operator $\tilde{T} \in L(Z, X)$ mit $\|\tilde{T}\| \leq t\|T\|$ und $\tilde{T}_{|Y} = T$ existiert.

Die Fortsetzungskonstante $\lambda(X)$ eines Banachraumes X ist

$$\inf\{t | X \text{ hat die t-Fortsetzungseigenschaft}\}. \tag{3.6}$$

Mit dem Satz von John zeigt man, dass $\lambda(X) \leq \sqrt{\dim X}$ gilt. Die allerwenigsten unendlich dimensionalen Banachräume besitzen die Fortsetzungseigenschaft. Die Banachräume mit der 1-Fortsetzungseigenschaft sind die Räume $C(K)$ aller stetigen Funktionen auf einer kompakten Menge K mit der Supremumsnorm, wobei K Hausdorff und extrem unzusammenhängend ist [Nac]. Ein topologischer Raum heißt extrem unzusammenhängend, wenn der Abschluss jeder offenen Menge wieder offen ist.

Es ist ein offenes Problem, ob jeder Raum mit der Fortsetzungseigenschaft isomorph zu einem Raum mit der 1-Fortsetzungseigenschaft ist.

Eine Projektion P auf einem Banachraum X ist eine Abbildung in $L(X)$ mit $P^2 = P$. Eine Projektion ist auf ihrem Bild gleich der Identität. Wir sagen auch, dass ein Teilraum komplementiert ist, wenn es eine stetige Projektion gibt, deren Bild gleich diesem Teilraum ist. Falls ein Teilraum Y von X komplementiert ist, dann gibt es einen weiteren Teilraum Z mit $Y \cap Z = \{0\}$ und $X = Y + Z$, so dass die Norm von X zu der Norm $\| \ \|_Y + \| \ \|_Z$ äquivalent ist.

Ein Banachraum X hat die t-Projektionseigenschaft, falls zu allen Banachräumen Y, und allen Isometrien $I : X \to Y$, eine Projektion $P : Y \to Y$ mit $\text{Bild}(P) = I(X)$ und $\|P\| \leq t$ existiert. Die Projektionskonstante eines Banachraumes X ist

$$\inf\{t | X \text{ hat die t-Projektionseigenschaft}\}.$$

Lemma 112 *Zu jedem Banachraum X gibt es eine Menge Γ, so dass X isometrisch isomorph zu einem Teilraum von*

$$\ell^\infty(\Gamma) = \left\{ x : \Gamma \to \mathbb{R} \,\middle|\, \sup_{i \in \Gamma} |x(i)| < \infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \Gamma} |x(i)|$$

ist.

Beweis. Wir wählen als Γ die Menge der stetigen Funktionale auf X mit der Norm 1. Wir wählen als Einbettung $I : X \to \ell^\infty(\Gamma)$

$$I(x) = (\phi(x))_{\phi \in \Gamma}$$

I ist linear.

$$I(x+y) = (\phi(x+y))_{\phi\in\Gamma} = (\phi(x))_{\phi\in\Gamma} + (\phi(y))_{\phi\in\Gamma} = I(x) + I(y)$$

I ist eine Isometrie.

$$\|I(x)\|_\infty = \|(\phi(x))_{\phi\in\Gamma}\|_\infty = \sup_{\phi\in\Gamma} |\phi(x)| \leq \sup_{\phi\in\Gamma} \|\phi\|_{X^*}\|x\|_X \leq \|x\|_X$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert zu jedem $x \in X$ ein Funktional ϕ_x mit $\|\phi_x\| = 1$ und $\phi_x(x) = \|x\|$. Damit erhalten wir

$$\|x\| = \phi_x(x) \leq \sup_{\phi\in\Gamma} |\phi(x)| = \|I(x)\|$$

□

Lemma 113 *Der Raum* $\ell^\infty(I)$ *hat die* 1*-Fortsetzungseigenschaft.*

Beweis. □

Lemma 114 *Es sei* X *ein Banachraum und* $J : X \to \ell_\infty(I)$ *eine lineare Isometrie. Dann gilt*

$$\lambda(X) = \inf\{\|P\| | P^2 = P \textit{ und } \mathrm{Bild}(P) = J(X)\}$$

Lemma 115 *Ein Banachraum* X *hat genau dann die* t*-Fortsetzungseigenschaft, wenn er die* t*-Projektionseigenschaft besitzt.*

Beweis. X besitze die t-Fortsetzungseigenschaft und X sei als Teilraum in Y enthalten. Dann gibt es zu der identischen Abbildung $id : X \to X$ eine Fortsetzung $\tilde{id} : Y \to X$ mit $\|\tilde{id}\| \leq t$. Die Einbettung von X nach Y bezeichnen wir mit $i_{X,Y}$. Dann ist $i_{X,Y} \circ \tilde{id}$ eine Projektion mit $\|i_{X,Y} \circ \tilde{id}\| \leq t$.

X besitze die t-Projektionseigenschaft und $T : Y \to X$. Nach Lemma 112 gibt es eine Indexmenge I, so dass X isometrisch isomorph zu einem Teilraum von $\ell_\infty(I)$ ist. Die Einbettung bezeichnen wir mit $i_{X,\infty}$. Die Abbildung $i_{X,\infty} \circ T$ besitzt eine Forsetzung $\widetilde{i_{X,\infty} \circ T}$ mit $\|\widetilde{i_{X,\infty} \circ T}\| \leq t\|T\|$ □

Wir wollen nun ein Beispiel eines Raumes angeben, der keine Fortsetzungseigenschaft besitzt. Es handelt sich dabei um den Raum c_0. Um nachzuweisen, dass c_0 keine Fortsetzungseigenschaft besitzt, zeigen wir, dass c_0 nicht in ℓ^∞ komplementiert ist.

Beispiel 26 c_0 *ist nicht in* ℓ^∞ *komplementiert.*

Um dies zu zeigen, weisen wir eine stärkere Aussage nach. Dazu brauchen wir das folgende Lemma [Pel1] und [Whi].

Lemma 116 *Es gibt überabzählbar viele unendliche Teilmengen N_i, $i \in I$, von $\mathbb{N}$, so dass für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ die Menge $N_i \cap N_j$ endlich ist.*

Beweis. Weil $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ dieselbe Mächtigkeit besitzen, reicht es Teilmenge N_i von $\mathbb{Q}$ mit den gewünschten Eigenschaften nzu finden.

Es sei $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wir wählen als N_i eine Folge rationaler Zahlen, die gegen i konvergiert. Da i irrational ist, so ist N_i als Menge unendlich. Die Menge $N_i \cap N_j$ ist für $\neq j$ endlich, weil die Grenzwerte verschieden sind. $\Box$

Lemma 117 *Es sei E ein komplementierter Teilraum von ℓ^∞, der c_0 in seiner natürlichen Identifikation enthält. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge N von $\mathbb{N}$, so dass $\ell^\infty(N) = \{x \in \ell^\infty | \forall i \notin N : x(i) = 0\}$ ein Teilraum von E ist.*

Insbesondere kann kein Teilraum von ℓ^∞ komplementiert sein, falls er isomorph zu c_0 ist.

Tatsächlich lässt sich mehr zeigen: Ein unendlich-dimensionaler Teilraum von ℓ^∞ ist genau dann komplementiert, wenn er isomorph zu ℓ^∞ ist [Lin1].

Beweis. Wegen Lemma 116 gibt es eine überabzählbare Familie N_γ, $\gamma \in \Gamma$, von unendlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, so dass für alle γ und β mit $\gamma \neq \beta$ die Menge $N_\gamma \cap N_\beta$ endlich ist.

Wir betrachten die Teilräume

$$\ell^\infty(N_\gamma) = \{x \in \ell^\infty | \forall i \notin N_\gamma : x(i) = 0\}$$

von ℓ^∞ und behaupten, dass es ein γ gibt, so dass $\ell^\infty(N_\gamma) \subseteq E$.

Es sei $\Phi : \ell^\infty \to \ell^\infty/E$ die Quotientenabbildung. Da E in ℓ^∞ komplementiert ist, ist ℓ^∞/E zu einem Teilraum von ℓ^∞ isomorph. Deshalb gibt es eine Folge $f_j \in (\ell^\infty/E)^*$, $j \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in \ell^\infty/E$ gilt: $x = 0$ gilt genau dann, wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ die Gleichung $f_j(x) = 0$ gilt. Wir weisen dies nach.

Es sei F ein Teilraum von ℓ^∞, der zu ℓ^∞/E isomorph ist, und $I : \ell^\infty/E \to F$ sei der Isomorphismus. Es seien e_i^*, $i \in \mathbb{N}$, die Koordinatenfunktionale

$$e_i^*(x) = x_i$$

Es gilt für alle $x \in \ell^\infty$, dass genau dann $x = 0$ gilt, wenn für alle $i \in \mathbb{N}$ die Gleichung $e_i^*(x) = 0$ gilt. Insbesondere gilt diese Aussage für alle Vektoren in dem Teilraum F. Wir schränken nun die Funktionale auf den Teilraum F ein und nennen diese $\tilde{e}_i^*$, $i \in \mathbb{N}$. Also gilt dieselbe Aussage für die Folge $f_i = I^*(\tilde{e}_i^*)$, $i \in \mathbb{N}$, und alle Vektoren im Raum ℓ^∞/E. Wir überprüfen dies. Für alle i gilt

$$0 = I^*(\tilde{e}_i^*)(z) = \tilde{e}_i^*(I(z))$$

Also gilt $I(z) = 0$. Da I Isomorphismus ist, folgt $z = 0$.

Wir nehmen nun an, dass es kein γ mit $\ell^\infty(N_\gamma) \subseteq E$ gibt. Es folgt, dass für alle γ ein $x_\gamma \in \ell^\infty(N_\gamma)$ mit $x_\gamma \notin E$ existiert. Wir können außerdem fordern, dass $\|x_\gamma\| = 1$ gilt. Wir beobachten nun, dass für alle Vorzeichen $\epsilon_i = \pm 1$ und alle endlichen Folgen x_{γ_i}, $i = 1, \ldots, n$,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i \Phi(x_{\gamma_i}) \right\|_{\ell^\infty/E} \leq \|\Phi\| \tag{3.7}$$

gilt. Dies folgt, weil c_0 im Kern von Φ liegt und $N_\gamma \cap N_\beta$ für $\gamma \neq \beta$ eine endlich Menge ist.

$$\left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i \Phi(x_{\gamma_i}) \right\|_{\ell^\infty/E} = \left\| \Phi\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_{\gamma_i} \right) \right\|_{\ell^\infty/E} = \left\| \Phi\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i} \right) \right\|_{\ell^\infty/E}$$

wobei

$$\tilde{x}_{\gamma_i}(k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \in \bigcup_{i \neq j}(N_{\gamma_i} \cap N_{\gamma_j}) \\ x_{\gamma_i}(k) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir weisen die letzte Gleichheit nach. Weil $\bigcup_{i \neq j}(N_{\gamma_i} \cap N_{\gamma_j})$ eine endliche Menge ist, unterscheiden sich die Vektoren x_{γ_i} und $\tilde{x}_{\gamma_i}$ nur in endlich vielen Koordinaten. Deshalb $x_{\gamma_i} - \tilde{x}_{\gamma_i} \in c_0$ und somit

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_{\gamma_i} - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i} \in c_0$$

und $c_0 \subseteq E$. Deshalb gilt

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_{\gamma_i}\right) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i}\right)$$

Wir schätzen weiter ab. Man beachte, dass die Vektoren x_{γ_i}, $i = 1, \ldots, n$, paarweise disjunkte Träger haben und für alle $i = 1, \ldots, n$ die Gleichung $\|x_{\gamma_i}\| = 1$. Deshalb gibt es für jedes k in der Summe

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i}(k)$$

höchstens einen Summanden, der von 0 verschieden ist. Es folgt

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i}\right\|_{\infty} \leq 1$$

Damit

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \Phi(x_{\gamma_i})\right\|_{\ell^\infty/E} \leq \|\Phi\| \left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tilde{x}_{\gamma_i}\right\|_{\infty} \leq \|\Phi\|$$

Damit haben wir (3.7) nachgewiesen. Aus (3.7) folgt, dass für alle $f \in (\ell^\infty/E)^*$ mit $\|f\| = 1$ und für alle $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$

$$\begin{aligned} \|\Phi\| &\geq \sup_{\epsilon} \left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \Phi(x_{\gamma_i})\right\|_{\ell^\infty/E} = \sup_{\epsilon} \sup_{\|f\|=1} f\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \Phi(x_{\gamma_i})\right) \\ &= \sup_{\|f\|=1} \sup_{\epsilon} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i f\left(\Phi(x_{\gamma_i})\right) = \sum_{i=1}^{n} |f(\Phi(x_{\gamma_i}))| \end{aligned} \tag{3.8}$$

gilt. Hieraus folgt, dass es nur abzählbar viele γ mit $f(\Phi(x_\gamma)) \neq 0$ gibt. Wir weisen dies nach. Falls es nämlich überabzählbar viele γ mit $|f(\Phi(x_\gamma))| > 0$ gibt, dann gibt es ein n, so dass für unendlich viele γ die Ungleichung

$$|f(\Phi(x_\gamma))| \geq \frac{1}{n}$$

Dies widerspricht aber (**??**). Also gibt es für jedes j nur abzählbar viele γ, so dass $f_j(\Phi(x_\gamma)) \neq 0$. Die Menge dieser γ bezeichnen wir mit N_j. Dann ist $\bigcup_j N_j$ abzählbar und das Komplement deshalb nicht leer. Also gibt es ein γ, so dass für alle j

$$f_j(\Phi(x_\gamma)) = 0$$

gilt. Es folgt $\Phi(x_\gamma) = 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

Korollar 9 c_0 *ist nicht zu einem Dualraum isomorph.*

Beweis. Wir nehmen an, dass c_0 isomorph zu einem Dualraum X^* ist. Es gibt also eine bijektive Abbildung $I : X^* \to c_0$, die stetig ist und deren Inverse ebenfalls stetig ist. Dann ist $I^{**} : X^{***} \to \ell_\infty$ ein stetiger Isomorphismus und $(I^{**})_{|X^*} = I$.

Nach dem Lemma von Dixmier gibt es eine Projektion $P : X^{***} \to X^{***}$ mit $\text{Bild}(P) = X^*$. Dann ist $I^{**} \circ P \circ (I^{**})^{-1}$ eine Projektion mit

$$\text{Bild}(I^{**} \circ P \circ (I^{**})^{-1}) = \text{Bild}(I^{**} \circ P) = I^{**}(X^*) = c_0$$

Wir wissen aber, dass c_0 nicht in ℓ_∞ komplementiert ist. □

Ein topologischer Raum heißt extrem unzusammenhängend, wenn der Abschluss jeder offenen Menge offen ist.

Ein normierter Raum hat die binäre Durchschnittseigenschaft, wenn jede Familie von abgeschlossenen Kugeln, die paarweise einen nichtleeren Durchschnitt besitzen, einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Satz 26 *Es sei X ein reeller Banachraum. Dann sind äquivalent:*
(i) X hat die binäre Durchschnittseigenschaft.
(ii) X hat die 1-Fortsetzungseigenschaft.
(iii) X ist isometrisch zu einem Raum $C(K)$, wobei K ein extrem unzusammenhängender, kompakter, Hausdorff Raum ist.

Man vermutet, dass die Banachräume mit der t-Fortsetzungseigenschaft isomorph zu einem Raum $C(K)$ sind, wobei K ein extrem unzusammenhängende, kompakte, Hausdorff Raum ist.

Beweis. □

Beispiel 27 *(i) $(\mathbb{R}, |\,|)$ mit dem üblichen Abstand besitzt die binäre Durchschnitteigenschaft.*

(ii) $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Norm besitzt nicht die binäre Durchschnittseigenschaft.

(iii) $\ell_\infty(I)$ besitzt die binäre Durchschnittseigenschaft.

Beweis. (i) Es sei $[x_\iota - \epsilon_\iota, x_\iota + \epsilon_\iota]$, $\iota \in I$, eine Familie von abgeschlossenen Kugeln, die paarweise einen nichtleeren Schnitt besitzen. Es gilt also für alle $\iota, \eta \in I$

$$x_\iota - \epsilon_\iota \le x_\eta + \epsilon_\eta$$

Es folgt, dass für alle $\iota \in I$

$$x_\iota - \epsilon_\iota \le \sup_{\eta \in I}(x_\eta - \epsilon_\eta) \le \inf_{\eta \in I}(x_\eta + \epsilon_\eta) \le x_\iota - \epsilon_\iota$$

gilt. Hiermit folgt für alle $\iota \in I$

$$\emptyset \ne \left[\sup_{\eta \in I}(x_\eta - \epsilon_\eta), \inf_{\eta \in I}(x_\eta + \epsilon_\eta)\right] \subseteq [x_\iota - \epsilon_\iota, x_\iota + \epsilon_\iota]$$

□

Die zur Fortsetzungseigenschaft duale Eigenschaft ist die Lifting-Eigenschaft. Ein Banachraum X besitzt die Lifting-Eigenschaft, wenn es zu jeder surjektiven Abbildung $S : Y \to Z$ und zu jeder Abbildung $T : X \to Z$ eine Abbildung $\hat{T} : X \to Y$ mit $S \circ \hat{T} = T$ gibt.

Es sei I ein Indexbereich. Dann besitzt $\ell_1(I)$ die Lifting-Eigenschaft

3.8 Satz von Baire

René Louis Baire (1874-1932) wurde in Paris geboren. Er war Schüler an der Ecole Normale Supérieure. Nachdem er als Lehrer an Gymnasien in Troyes, Bar-le-Duc und Nancy gearbeitet hatte, lehrte er ab 1902 an der Universität von Montpellier und ab 1905 an der von Dijon. Da er seit seiner Jugend krank war, musste er ab 1914 auf jede Forschungs-und Lehrtätigkeit verzichten. Er zog sich an den Genfer See zurück und starb in Chambéry [Dieu].

Der Satz von Baire besagt, dass in einem vollständigen, metrischen Raum der Schnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ von offenen, dichten Mengen U_n, $n \in \mathbb{N}$, dicht im metrischen Raum ist.

Dieser Satz ist grundlegend und hat viele Anwendungen und wir benötigen ihn, um den Satz von der offenen Abbildung und den Satz vom abgeschlossenen Graphen zu beweisen.

Es stellt sich die Frage, ob die Aussage des Satzes von Baire auch in metrischen Räumen gilt, die nicht vollständig sind. Ein topologischer Raum heißt lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt. Der Satz von Baire gilt auch in lokalkompakten Räumen. Lokalkompakte Räume sind i.a. nicht vollständig, wie z.B. das offene Intervall $(0, 1)$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik.

Der Satz von Baire gilt auch in metrischen Räumen, in denen das Spiel von Choquet [HiLa, p.20] eine Gewinnstrategie besitzt.

Es sei X ein metrischer Raum. Zwei Spieler, Adam und Eva, spielen das Spiel von Choquet: Adam darf eine offene, nichtleere Teilmenge U_1 von X wählen. Dann wählt Eva eine offene, nichtleere Teilmenge V_1 von U_1. Dann wählt Adam wieder eine offene, nichtleere Teilmenge U_2 von V_1. Auf diese Weise entstehen zwei Folgen U_n, $n \in \mathbb{N}$, und V_n, $n \in \mathbb{N}$, von offenen, nichtleeren Mengen mit

$$U_n \supseteq V_n \supseteq U_{n+1}$$

Es gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

Wir nennen diesen Schnitt U. Adam hat gewonnen, wenn U die leere Menge ist, und Eva hat gewonnen, wenn U nicht die leere Menge ist.

Wir sagen, dass einer der Spieler eine Gewinnstrategie hat, wenn es eine Methode gibt, so dass dieser Spieler immer gewinnen kann. Falls der zweite Spieler eine Gewinnstrategie hat, dann gilt in dem metrischen Raum der Satz von Baire.

Falls der metrische Raum X vollständig ist, so kann man immer erreichen, dass der Schnitt nicht leer ist. Wir wollen dies nachweisen. Nachdem der Gegenspieler eine offene Menge U_n gewählt hat, wählen wir eine offene Kugel in U_n, deren Radius kleiner oder gleich 2^{-n} ist. Die Folge der Kugelmittelpunkte ist dann eine Cauchy-Folge. Der Grenzwert ist Element des Durchschnittes U.

Satz 27 *(Baire) Es sei X ein vollständiger, metrischer Raum. Falls U_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von offenen Teilmengen von X ist, die dicht in X sind, dann ist auch*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

in X dicht.

Die Vollständigkeit im Satz von Baire ist eine hinreichende, aber keinesfalls notwendige Voraussetzung. So ist der Satz von Baire in dem metrischen Raum $(0,1)$ mit der üblichen Abstandsmetrik richtig, obwohl dieser Raum nicht vollständig ist. In dem metrischen Raum $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Abstandsmetrik ist der Satz von Baire falsch. Dazu betrachte man eine Abzählung der rationalen Zahlen q_n, $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Mengen $A_n = \{q_k | k \geq n\}$ alle dicht in $\mathbb{Q}$, aber $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$.

Es gibt einen metrischen Raum, der die Aussage des Satzes von Baire erfüllt, aber das Produkt dieses Raumes mit sich erfüllt nicht die Aussage. Dies wurde von Oxtoby mit der Kontinuumshypothese bewiesen [Ox2].

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle $y \in X$ und für alle offenen Umgebungen W von y

$$W \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \neq \emptyset$$

gilt.

Wir zeigen, dass es eine Folge von Punkten x_n, $n \in \mathbb{N}$, und Radien r_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $r_n < \frac{1}{2^n}$, $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq W$ gibt, so dass

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq B(x_n, r_n) \subseteq \overline{B(x_n, r_n)} \subseteq U_n$$

Da U_1 und W offen sind, ist $U_1 \cap W$ eine offene Menge. $U_1 \cap W$ ist nicht leer, weil sonst U_1 nicht dicht in X wäre. Deshalb gibt es x_1 und $0 < r_1 < 1$ mit

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq U_1 \cap W$$

Wir nehmen an, dass wir n Punkte gewählt haben. Es sind U_{n+1} und $B(x_n, r_n)$ offene Mengen, somit ist $U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ eine offene Menge. Sie ist nicht leer, weil U_{n+1} sonst nicht dicht in X wäre. Also gibt es $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$. Da $U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$ offen ist, gibt es $r_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}$ mit

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq U_{n+1} \cap B(x_n, r_n)$$

Die Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Cauchy Folge. Für alle $n, m > N$ gilt

$$B(x_n, r_n) \subseteq B(x_N, r_N) \qquad B(x_m, r_m) \subseteq B(x_N, r_N)$$

Also gilt $d(x_n, x_m) < 2^{-N+1}$. Da X vollständig ist, konvergiert diese Folge

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Es gilt

$$x \in W \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right)$$

Wir prüfen das nach.

$$\forall N \forall n > N : x_n \in B(x_N, r_N)$$

Es folgt

$$\forall N : x \in \overline{B(x_N, r_N)}$$

$$\forall N : x \in \overline{B(x_N, r_N)} \subseteq U_N \cap B(x_1, r_1) \subset U_N \cap W$$

$$x \in W \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right)$$

□

Man kann den Satz von Baire folgendermaßen verallgemeinern. Falls der metrische Raum immer für das Spiel von Choquet eine Strategie zulässt, so dass der Schnitt nicht leer ist, dann gilt die Aussage vom Satz von Baire. Wir zeigen dies. Es seien U_n, $n \in \mathbb{N}$, offene Mengen, die sämtlich dicht in X sind und W die offene Umgebung eines Punktes in X. Zu $U_1 \cap W$ wählen wir gemäß unserer Strategie die offene Menge V_1, $V_1 \subseteq U_1$. Der Gegenspieler antwortet mit $V_1 \cap U_2$. Diese Menge ist nicht leer, weil U_2 dicht ist. Nun wählen wir gemäß unserer Strategie die offene Menge V_2, $V_2 \subseteq V_1 \cap U_2$, usw.

Lemma 118 *Es sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent.*
(i) Falls U_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von offenen Teilmengen von X ist, die dicht in X sind, dann ist auch

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

in X dicht.
(ii) Für alle Folgen abgeschlossener Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, die sämtlich leeres Inneres haben, gilt, dass auch die Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

leeres Inneres hat.
(iii) Für alle abgeschlossenen Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, deren Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

einen inneren Punkt enthält, gilt dass mindestens eine der Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, einen inneren Punkt enthält.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$ Die Mengen $U_n = A_n^c$, $n \in \mathbb{N}$, sind offen und dicht in X. Nach (i) ist auch

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c$$

dicht in X. Also enthält $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ keinen inneren Punkt.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Wir setzen $A_n = U_n^c$. Da U_n dicht in X sind, haben A_n leeres Inneres und nach (ii) auch die Vereinigung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right)^c .$$

Also ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ dicht in X.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: (ii) ist die Kontraposition von (iii). $\square$

Eine Menge heißt nirgends dicht, falls das Innere vom Abschluss die leere Menge ist.

Korollar 10 *Es sei X ein vollständiger, metrischer Raum. X ist nicht abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen.*

Beweis. Es seien E_n, $n \in \mathbb{N}$, nirgends dichte Mengen. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\overset{\circ}{\overline{E_n}} = \emptyset.$$

Da X ein vollständiger, metricher Raum ist, gilt der Satz von Baire (Satz 27). Mit Lemma 118 folgt, dass

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$$

keinen inneren Punkt enthält. Es ergibt sich

$$X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n .$$

$\square$

Wir sagen, daß eine Teilmenge A eines topologischen Raumes von erster Kategorie ist, falls A abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist. Andernfalls sagen wir, dass A von zweiter Kategorie ist.

Beispiel 28 *(i) $\mathbb{Q}$ ist eine Menge erster Kategorie.*
(ii) $\mathbb{R}$ ist von zweiter Kategorie.
(iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist von zweiter Kategorie.
(iv) In dem metrischen Raum $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt der Satz von Baire.
(v) $\mathbb{Q}$ ist keine G_δ-Menge.

Beweis. (i) Jede abzählbare Menge ist abzählbare Vereinigung einpunktiger Mengen. (ii) folgt mit dem Satz von Baire. (iii) folgt aus (ii). Dazu nehmen wir an, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ von erster Kategorie ist.

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{mit} \qquad \overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset$$

q_n, $n \in \mathbb{N}$, sei eine Abzählung der rationalen Zahlen. Wir setzen $B_{2n} = A_n$ und $B_{2n+1} = \{q_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \qquad \text{und} \qquad \overset{\circ}{\overline{B_n}} = \emptyset$$

(v) Wir nehmen an, dass $\mathbb{Q}$ eine G_δ-Menge ist. Dann gibt es offene Mengen O_n, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n.$$

Deshalb

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n^c.$$

Die abgeschlossenen Mengen O_n^c enthalten keine inneren Punkte, weil kein rationaler Punkt Element dieser Mengen ist. Damit ist $\mathbb{R}$ abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen, also von erster Kategorie. Dies ist falsch. □

Beispiel 29 *Die Hamel-Basis (algebraische Basis) eines unendlich-dimensionalen Banachraumes X ist überabzählbar.*

Beweis. Wir nehmen an, dies sei nicht so. x_n sei eine abzählbare Hamel-Basis. Wir setzen

$$E_n = [x_1, \ldots, x_n] \qquad n \in \mathbb{N}$$

E_n sind abgeschlossene Teilräume und $X = \bigcup_n E_n$. Nach dem Satz von Baire gibt es ein n_0, so dass E_{n_0} nichtleeres Inneres besitzt. Also $B(x_0, r) \subset E_{n_0}$. Wegen $-x_0 \in E_{n_0}$ folgt $B(0, r) \subset E_{n_0}$. Es folgt $B(0, mr) \subset E_{n_0}$ und damit $X = E_{n_0}$. □

3.9 Satz von der offenen Abbildung

Wir sagen, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen offen ist, falls $f(U)$ für alle offenen Mengen U offen ist.

Der Satz von der offenen Abbildung besagt, dass eine stetige, surjektive, lineare Abbildung zwischen Banachräumen eine offene Abbildung ist. Beim Beweis benutzen wir den Satz von Baire. Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von der offenen Abbildung ist, dass eine stetige, bijektive Abbildung zwischen Banachräumen eine stetige Inverse besitzt.

Die Abbildung $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Abbildung, die nicht offen ist, weil $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Die identische Abbildung $id : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ zwischen dem Raum $\mathbb{R}$, einmal mit der diskreten Topologie ausgestattet und zum anderen mit der üblichen Metrik, ist stetig, bijektiv, aber nicht offen.

Lemma 119 *Es seien X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*
(i) $T : X \to Y$ ist eine offene Abbildung.
(ii) Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass

$$B_Y(0, \epsilon) \subseteq T(B_X(0, 1)).$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Falls T offen ist, dann ist die Menge $T(B_X(0, 1))$ offen. Weil $0 = T(0) \in T(B_X(0, 1))$, so ist 0 innerer Punkt von $T(B_X(0, 1))$.

Nun zeigen wir $(ii) \Rightarrow (i)$. Es sei U eine offene Menge in X. Wir müssen zeigen, dass $T(U)$ offen ist. Es sei $y_0 \in T(U)$. Dann gibt es $x_0 \in U$ mit $y_0 = T(x_0)$. Da U offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B(x_0, \epsilon) \subseteq U$.

$$T(B_X(x_0, \epsilon)) = T(x_0) + \epsilon T(B_X(0, 1)) \supseteq T(x_0) + \epsilon B_Y(0, 1) = B_Y(y_0, \epsilon)$$

$\square$

Satz 28 *Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ eine lineare, stetige Abbildung. Falls T surjektiv ist, dann ist T offen.*

Korollar 11 *Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ eine lineare, stetige Abbildung. Falls T bijektiv ist, dann ist auch T^{-1} eine stetige Abbildung.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass

$$B_Y(0, r) \subseteq T(B_X(0, 1))$$

gilt. Wir zeigen zunächst, dass es ein $r > 0$ mit

$$B_Y(0, r) \subseteq \overline{T(B_X(0, 1))}$$

gibt. Wegen Lemma 44 gilt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0,n)$. Somit

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0,n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_X(0,n)).$$

Es folgt

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_X(0,n))}.$$

Nach dem Kategoriensatz von Baire (Satz 27 und Lemma 118) gibt es ein n_0, so dass

$$\overline{T(B_X(0,n_0))}$$

einen inneren Punkt besitzt. Wegen $\overline{T(B_X(0,n_0))} = n_0\overline{T(B_X(0,1))}$ besitzt auch $\overline{T(B_X(0,1))}$ einen inneren Punkt. Deshalb gibt es ein y_0 und ein $r > 0$ mit

$$B_Y(y_0, 4r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$$

Tatsächlich wollen wir erreichen, dass eine Kugel mit Zentrum 0 in $\overline{T(B_X(0,1))}$ enthalten ist. Ein Verschieben von $B_Y(y_0, 4r)$ um den Vektor y_0 führt nicht zum Ziel, weil y_0 nicht in $T(B_X(0,1))$ liegen muss. Es gilt zwar

$$B_Y(0,4r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))} - y_0 = \overline{T(B_X(0,1)) - y_0},$$

aber an dieser Stelle brauchen wir, dass es ein $x_0 \in B_X(0,1)$ mit $T(x_0) = y_0$ gibt. Es gibt aber ein $x_1 \in B_X(0,1)$ mit

$$\|T(x_1) - y_0\| < 2r.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$B_Y(T(x_1), 2r) \subseteq B_Y(y_0, 4r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} B_Y(0,2r) \quad &= B_Y(T(x_1),2r) - T(x_1) \\ &\subseteq \overline{T(B_X(0,1))} - T(x_1) \\ &= \overline{T(B_X(0,1)) - T(x_1)} = \overline{T(B_X(x_1,1))}. \end{aligned}$$

Wegen $\|x_1\| < 1$ gilt $B_X(x_1,1) \subseteq B_X(0,2)$ und es folgt

$$B_Y(0,2r) \subseteq \overline{T(B_X(0,2))}.$$

Also gilt

$$B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}.$$

Nun zeigen wir, dass

$$B_Y(0, \tfrac{1}{2}r) \subseteq T(B_X(0,1))$$

gilt.

Es sei $y \in B_Y(0,r)$. Dann gibt es eine Folge $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|x_n\| < 2^{-n+1}$ und

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \right\| < \frac{r}{2^n}$$

Wir zeigen dies durch Induktion. Da $B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$ gilt, gibt es ein x_1 mit $\|x_1\| < 1$, so dass

$$\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{2}$$

Wir nehmen an, dass wir $x_1, \ldots, x_n$ gewählt haben, und wählen nun x_{n+1}. Wegen

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n} T(x_i) \right\| < \frac{r}{2^n} \quad \text{bzw.} \quad \left\| 2^n y - \sum_{i=1}^{n} T(2^n x_i) \right\| < r$$

und wegen $B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X(0,1))}$ gibt es ein x_{n+1} mit $\|2^n x_{n+1}\| < 1$ und

$$\left\| \left(2^n y - \sum_{i=1}^{n} T(2^n x_i) \right) - T(2^n x_{n+1}) \right\| < \frac{r}{2}.$$

Also gilt

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n+1} T(x_i) \right\| < \frac{r}{2^{n+1}}.$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i+1} = 2$$

konvergiert die Reihe $\sum x_i$ absolut. Da X ein Banachraum ist, konvergiert die Reihe gegen ein x in X mit $\|x\| < 2$. Außerdem konvergiert

$$\sum_{i=1}^{n} T(x_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

gegen y. Wegen der Stetigkeit von T folgt

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i) = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \right) = T(x).$$

Es folgt, dass $B_Y(0,r) \subseteq T(B_X(0,2))$. $\Box$

Im Satz von der offenen Abbildung wird vorausgesetzt, dass beide Räume X und Y Banachräume sind. Wir wollen mit einem Beispiel zeigen, dass man darauf nicht verzichten kann.

Beispiel 30 *X sei der Raum ℓ^1 mit der Norm $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ und Y sei der Raum ℓ^1 mit der Norm $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Dann ist die Identität $id : X \to Y$ eine bijektive, stetige Abbildung, aber die Inverse ist nicht stetig.*

Beweis. Wegen

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1$$

gilt $\|\mathrm{id}\| \le 1$. Andererseits gilt

$$\left\|\sum_{i=1}^n e_i\right\|_\infty = 1 \qquad \left\|\sum_{i=1}^n e_i\right\|_1 = n$$

Also ist id^{-1} nicht beschränkt. □

Im Satz von der offenen Abbildung wird vorausgesetzt, dass die Abbildung T stetig ist. Wir wollen ein Beispiel dafür angeben, dass man auf diese Voraussetzung nicht verzichten kann.

Beispiel 31 *Die Räume c_0 und ℓ_1 sind algebraisch isomorph, aber es gibt zwischen ihnen keine lineare, bijektive, stetige Abbildung.*

Beweis. Wir werden später das genaue Argument kennenlernen, das zeigt, dass c_0 und ℓ_1 nicht topologisch isomorph sind. Kurz gefasst lautet es: Der Dualraum von c_0 ist separabel und der von ℓ_1 ist nicht separabel, was nicht sein kann, wenn beide Räume topologisch isomorph wären.

Wir zeigen nun, dass beide Räume dieselbe algebraische Dimension besitzen, nämlich gleich der Kardinalität der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Beide Räume sind Teilmengen des Raumes aller Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Diese Menge hat die Kardinalität von $\mathbb{R}$. Somit haben die Basen eine Kardinalität, die kleiner oder gleich der von $\mathbb{R}$ ist.

Nach Beispiel 29 ist die Kardinalität der algebraischen Basis eines unendlich-dimensionalen Banachraumes überabzählbar. Mit der Kontinuumshypothese folgt, dass die Kardinalität größer oder gleich der Kardinalität des Kontinuums ist. □

Lemma 120 *Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ ein stetiger, linearer Operator, so dass* $\mathrm{Bild}(T)$ *abgeschlossen ist. Dann sind* $\mathrm{Bild}(T)$ *und* $X/\mathrm{Kern}(T)$ *isomorph und $\hat{T} : X/\mathrm{Kern}(T) \to \mathrm{Bild}(T)$ mit $\hat{T}([x]) = T(x)$ ist ein stetiger Isomorphismus.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\hat{T} : X/\mathrm{Kern}(T) \to \mathrm{Bild}(T)$ mit $\hat{T}([x]) = T(x)$. Die Abbildung $\hat{T}$ ist wohldefiniert, weil für x und y mit $[x] = [y]$ die Gleichung $T(x) = T(y)$ gilt. Außerdem ist sie bijektiv.

Die Abbildung $\hat{T}$ ist stetig, es gilt $\|T\| = \|\hat{T}\|$. Wir weisen die Gleichung nach. Es gilt immer $\|x\| \ge \|[x]\|$. Es folgt $\|T\| \le \|\hat{T}\|$. Es gilt

$$\|[x]\| = \inf\{\|x+y\| | T(y) = 0\}$$

Deshalb gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein y mit $T(y) = 0$ und

$$\|[x]\| + \epsilon \ge \|x+y\|$$

Es folgt

$$\|\hat{T}([x])\| = \|T(x)\| = \|T(x+y)\| \le \|T\|\|x+y\| \le \|T\|(\|[x]\| + \epsilon)$$

Da X und Y Banachräume sind, $\mathrm{Bild}(T)$ abgeschlossen ist, sind $\mathrm{Bild}(T)$ und $X/\mathrm{Kern}(T)$ Banachräume und aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt, dass $\hat{T}^{-1}$ stetig ist. □

Lemma 121 *Es seien X und Y Banachräume, $S : X \to Y$ ein stetiger, linearer Operator und Bild(S) abgeschlossen. Dann gilt*

$$(\mathrm{Kern}(S))^{\perp} = \mathrm{Bild}(S^*)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathrm{Bild}(S^*) \subseteq (\mathrm{Kern}(S))^{\perp}$. Falls $x^* \in \mathrm{Bild}(S^*)$

$$x^*(x) = S^*y^*(x) = y^*(Sx)$$

Für alle x mit $Sx = 0$ ist der letztere Ausdruck 0. Also gilt $x^* \in (\mathrm{Kern}(S))^{\perp}$.

Nun die umgekehrte Inklusion. Es sei $x^* \in (\mathrm{Kern}(S))^{\perp}$. Wir konstruieren nun ein y^* mit $x^* = S^*y^*$. Es sei $y_0^* : \mathrm{Bild}(S) \to \mathbb{R}$ durch

$$y_0^*(y) = x^*(x) \qquad \text{falls} \quad S(x) = y$$

gegeben. Wir weisen nach, dass y_0^* ist wohldefiniert und stetig ist. Es seien x_1 und x_2 mit $y = S(x_1) = S(x_2)$. Dann $0 = S(x_1 - x_2)$ und somit $x^*(x_1 - x_2) = 0$

$$x^*(x_1) = x^*(x_2)$$

Wir zeigen nun, dass y_0^* stetig ist. Nach Lemma 120 ist $\hat{S} : X/\mathrm{Kern}(S) \to \mathrm{Bild}(S)$ mit $\hat{S}([x]) = S(x)$ ein stetiger Isomorphismus.

$\hat{x}^* : X/\mathrm{Kern}(S) \to \mathbb{R}$ sei durch $\hat{x}^*([x]) = x^*(x)$ gegeben. Dieses Funktional ist wohldefiniert und stetig. Wir überprüfen die Stetigkeit. Für jedes $\epsilon > 0$ und $x \in X$ gibt es ein y mit $Sy = 0$, so dass

$$\|[x]\| + \epsilon \geq \|x + y\|$$

Deshalb

$$|\hat{x}^*([x])| = |x^*(x)| = |x^*(x + y)| \leq \|x^*\|\|x + y\| \leq \|x^*\|(\|[x]\| + \epsilon)$$

Wir beobachten, dass $y_0^* = \hat{x}^* \circ \hat{S}^{-1}$: Es sei $y \in \mathrm{Bild}(S)$, also $y = Sx$. Dann gilt $y_0^*(y) = x^*(x)$ und

$$\hat{x}^* \circ \hat{S}^{-1}(y) = \hat{x}^*(\hat{S}^{-1}(y)) = \hat{x}^*([x]) = x^*(x)$$

Deshalb ist y_0^* stetig. Mit dem Satz von Hahn-Banach können wir das Funktional y_0^* zu einem Funktional y^* auf Y fortsetzen. Es folgt für alle $x \in X$

$$x^*(x) = y_0^*(Sx) = y^*(Sx) = (S^*y^*)(x)$$

Es folgt $x^* = S^*y^*$. $\square$

3.10 Satz vom abgeschlossenen Graphen

Es seien X und Y Mengen und $T : X \to Y$ eine Abbildung. Der Graph dieser Abbildung ist

$$\mathrm{Graph}(T) = \{(x, y) | y = T(x)\}$$

Falls X und Y Vektorräume sind und T eine lineare Abbildung ist, dann ist Graph(T) ein Teilraum von $X \times Y$.

Wir sagen, dass der Graph von T abgeschlossen ist, wenn Graph(T) im Raum $X \times Y$ eine abgeschlossene Menge ist.

Falls X und Y normierte Räume sind, dann ist die Produkttopologie auf $X \times Y$ durch die Norm $\| \ \|_X + \| \ \|_Y$ gegeben. (Wir könnten auch die Norm $\max\{\| \ \|_X, \| \ \|_Y\}$ verwenden.) Die Stetigkeit von T bedeutet, dass für alle $x \in X$ und alle Folgen x_n, $n \in \mathbb{N}$, die gegen x konvergieren

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} T(x_n)$$

gilt. Die Abgeschlossenheit des Graphen von T bedeutet, dass für alle $(x, y) \in X \times Y$ und alle Folgen $(x_n, y_n) \in \mathrm{Graph}(T)$, $n \in \mathbb{N}$, die gegen (x, y) konvergieren, gilt

$$(x, y) \in \mathrm{Graph}(T)$$

Dies bedeutet, dass für alle $(x, y) \in X \times Y$ und alle Folgen $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \text{und} \quad y = \lim_{n \to \infty} T(x_n)$$

folgt, dass $T(x) = y$. Offenbar impliziert die Stetigkeit von T die Abgeschlossenheit des Graphen. Die Umkehrung ist i.a. falsch. Wenn wir die Abgeschlossenheit eines Graphen nachprüfen, betrachten wir nur solche Folgen x_n, $n \in \mathbb{N}$, die konvergieren und für die die Folgen $T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, konvergieren.

Beispiel 32 *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

besitzt einen abgeschlossenen Graphen, aber die Funktion ist nicht stetig. Dieses Beispiel widerspricht nicht dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, weil f nicht linear ist.

Satz 29 *(Satz vom abgeschlossenen Graphen) Es seien X und Y Banachräume und $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung. T ist genau dann stetig, wenn der Graph von T abgeschlossen ist.*

Beweis. Wir leiten den Satz vom abgeschlossenen Graphen aus dem Satz von der offenen Abbildung her.