Analysis II

Carsten Schütt SS 2014

1. Konvergiert die Folge
$$\left\{\frac{(10n)!}{n^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} ?$$

2. Die Folge
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n \qquad\qquad n\in\mathbb{N}$$
konvergiert. (Der Grenzwert wird als Euler-Mascheroni Zahl γ bezeichnet und ist verschieden von der Zahl e.) Weiter gilt
$$1-\ln 2\leq\gamma\leq 1$$
und
$$1+\ln\frac{n}{2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq 1+\ln(n+1)$$
(Lorenzo Mascheroni, 13. Mai 1750 in Bergamo - 14. Juli 1800 Paris) Professor und Rektor der Universität Pavia.

3. (Bernoulli Ungleichung) (i) Für alle r mit $r\geq 1$ und alle x mit $-1\leq x$ gilt
$$1+rx\leq(1+x)^r$$
(ii) Für alle r mit $0<r<1$ und alle $x\geq -1$ gilt
$$(1+x)^r\leq 1+rx$$
Zeigen Sie dies mit Hilfe der Ableitungen der Funktionen. Fertigen Sie eine Zeichnung an.

4. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.
(i) Es seien $0<a,b$.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{a^{ex}-b^{ex}}$$
(ii)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$
(iii)
$$\lim_{x\to 0}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}$$

Carl Friedrich Gauß, einer der bedeutendsten Mathematiker, die jemals gelebt haben, berechnete als erster exakt die Bahnen des eben entdeckten Planetoiden Pallas. In seiner *Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert* schreibt Felix Klein: ...möchte ich zurückkehren zu der Frage, warum wohl Gauß die so energisch und erfolgreich betriebenen Arbeiten über die Pallas abgebrochen haben mag. Die Erscheinung, der wir hier begegnen, steht in Gauß' Schaffen nicht vereinzelt dar; oft hat er seine schönsten Errungenschaften nicht veröffentlicht. Was mag dieses seltsame Stillstehen dicht vor dem Ziel veranlaßt haben? Vielleicht ist der Grund in einer gewissen Hypochondrie zu suchen, die Gauß offenbar zuweilen mitten im erfolgreichsten Schaffen überfiel. Ein eigenartiges Zeugnis für solche Stimmungen findet sich z.B. in den Aufzeichnungen zu den Arbeiten über elliptische Funktionen etwa aus den Jahren 1807 bis 1810. Da steht plötzlich mitten zwischen den rein wissenschaftlichen Notizen ganz fein mit Bleistift geschrieben: Der Tod ist mir lieber als ein solches Leben.

Abgabe: Mittwoch, 23.4.2014, um 8:15

Analysis II

Carsten Schütt SS 2014

5. Was ist die Dimension des Vektorraumes $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$?

6. Das Geburtstagsproblem.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen einer Gruppe an demselben Tag Geburtstag haben? Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit bei 30 Personen größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Wir nehmen an, dass das Jahr 365 Tage besitzt und jede der Personen an einem dieser Tage Geburtstag hat.

(*Hinweis: Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit ab, dass alle Personen der Gruppe an verschiedenen Tagen Geburtstag haben. Benutzen Sie die Abschätzung* $1 - t \leq e^{-t}$.)

7. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle λ mit $0 < \lambda < 1$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

gilt. Zeigen Sie, dass eine solche Funktion stetig ist. Fertigen Sie eine Zeichnung an, mit der Sie den Begriff der konvexen Funktion erläutern.

8. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es zu allen Punkten $x, y \in M$ mit $x \neq y$ zwei Umgebungen $U(x)$ und $U(y)$ mit $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

9. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ seien mit der diskreten Metrik ausgestattet. Welches sind die offenen Mengen, abgeschlossenen Mengen und kompakten Mengen? Welches sind die konvergenten Folgen?

Das Vier-Farben-Problem

Das Vier-Farben-Problem lautet: Reichen 4 Farben aus, um eine Landkarte so zu kolorieren, dass alle aneinandergrenzenden Länder verschiedene Farben haben?

Es war lange bekannt, dass drei Farben nicht ausreichen, aber fünf schon ausreichen.

Dieses Problem wurde 1976 von Kenneth Appel (8.10.1932, New York - 19.4.2013, Dover, New Hampshire) und Wolfgang Haken (21.6.1928, Berlin) gelöst. Haken studierte Mathematik, Physik und Philosophie in Kiel, wo er 1953 bei Karl-Heinrich

Weise über ein Thema der Topologie promovierte. Appel und Haken arbeiteten beide an der University of Illinois.

Das Vier-Farben-Problem ist das erste große Problem der Mathematik, das nicht ohne den Einsatz von einem Computer bewiesen werden konnte.

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, Aufgabe 6 zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 30.4.2014, um 8:15

Analysis II

Carsten Schütt SS 2014

10. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

punktweise konvergiert auf $\mathbb{R}$ und für alle $a > 0$ auf den Intervallen $(-\infty, -a]$ und $[a, \infty)$ gleichmäßig. Die Reihe konvergiert nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

11. Es sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{P}_n$ die Menge aller Primzahlen, die kleiner oder gleich n sind. Zeigen Sie, dass

$$\ln\left(1 + \ln\frac{n}{2}\right) < 2 \sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p}.$$

Folgern Sie, dass

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

divergiert.

Hinweis: Es sei $n \geq 2$ und p bezeichne Primzahlen. Zeigen Sie zuerst

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{p}{p-1} = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k}.$$

Dann zeigen Sie

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hierzu benutzen Sie den Primzahlzerlegungssatz. Also

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{p}{p-1} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Folgern Sie

$$\ln\left(\prod_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{p}{p-1}\right) > \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right).$$

und wenden Sie Aufgabe 2 an.

12. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) f ist konvex.
(ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) + f'(x)(y - x) \leq f(y).$$

(iii) Die Ableitung f' ist eine wachsende Funktion.

13. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) \geq 0$$

gilt.

14. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:
(i) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
(ii) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Die n-te Kusszahl

In der Geometrie ist die n-te Kusszahl die maximale Anzahl an n-dimensionalen Euklidischen Einheitskugeln, die gleichzeitig eine weitere Euklidische Einheitskugel berühren, ohne dass Überschneidungen auftreten.

Die Kusszahl in Dimension 1 *ist* 2 *und in Dimension* 2 *ist sie* 6. *Die Kusszahl in der Dimension* 3 *ist nicht so einfach zu berechnen. Sie war Gegenstand einer Auseinandersetzung zwischen Isaac Newton und David Gregory. Newton behauptete, dass die Zahl* 12 *ist und Gregory behauptete, dass sie* 13 *ist. Newton hatte recht.*

Die Kusszahl in Dimension 4 *ist* 24, *in Dimension* 8 *ist sie* 240 *und in Dimension* 24 *ist sie* 196560. *Weitere Kusszahlen sind nicht bekannt.*

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, Aufgabe 11 zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 7.5.2014, 8:15

Analysis II

Carsten Schütt SS 2014

15. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ seien mit den Metriken d_1 und d_2 ausgestattet, die für alle $s,t \in \mathbb{R}$ durch $d_1(s,t) = |s-t|$ und

$$d_2(s,t) = \left| \frac{s}{1+|s|} - \frac{t}{1+|t|} \right|$$

definiert sind. Zeigen Sie, dass d_2 eine Metrik ist. Zeigen Sie, dass die offenen Mengen in $(\mathbb{R}, d_1)$ und $(\mathbb{R}, d_2)$ dieselben sind. Zeigen Sie weiter, dass $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht vollständig ist.

16. Wir bezeichnen

$$\ell_2 = \left\{ x = \{x(i)\}_{i=1}^{\infty} \middle| \forall i \in \mathbb{N} : x(i) \in \mathbb{R} \ \wedge \ \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^2 < \infty \right\}$$

Zeigen Sie:
(i) ℓ_2 ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.
(ii) Es sei die Abbildung $\| \ \|_2 : \ell_2 \to \mathbb{R}$ für $x \in \ell_2$ durch

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

definiert. $\| \ \|_2$ ist eine Norm auf ℓ_2.
(iii) Die Einheitskugel in ℓ_2

$$B_2(0,1) = \{x \in \ell_2 | \|x\|_2 \leq 1\}$$

ist beschränkt, nicht total beschränkt und nicht kompakt.

17. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ seien mit der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ ausgestattet. Zeigen Sie $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

18. Jede beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Norm ist total beschränkt.

19. Es sei $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x,y) = |x-y|$ ausgestattet. Entscheiden Sie, ob das Intervall $(0,1)$ kompakt ist. Verwenden Sie dabei nur die Definition der Kompaktheit.

Um 1640 stellte Pierre de Fermat die folgende Vermutung auf: Die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

hat für $x, y, z, n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq 3$ *keine Lösung. Im Fall* $n = 2$ *findet man eine Lösung, es gilt nämlich*

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Die Vermutung wurde 1994 von Andrew Wiles, Cambridge, bewiesen.

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, Aufgabe 16 zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 14.5.2014, 8:15

Analysis II

Carsten Schütt SS 2014

20. Zeigen Sie, dass die offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen des $\mathbb{R}^n$ für alle Normen gleich sind.

21. Welche der Teilmengen vom $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Norm sind kompakt? Bestimmen Sie die Ränder der Mengen.

$$(i) \quad \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} |x(i)|^2 \leq 1 \right\} \qquad (ii) \quad \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} |x(i)|^2 = 1 \right\}$$

$$(iii) \quad \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| 0 < \max_{i=1,\dots,n} |x(i)| \leq 1 \right\} \qquad (iv) \quad \left\{ x \in \mathbb{Q}^n \middle| \max_{i=1,\dots,n} |x(i)| = 1 \right\}$$

22. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist Riemann-integrierbar. Verwenden Sie hierbei nur die Definition der Riemann-Integrierbarkeit.

23. Ist die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Riemann-integrierbar? Beweisen oder widerlegen Sie dies. Verwenden Sie nur die Definition der Integrierbarkeit.

24. Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:
(i) $f + g$ ist integrierbar und

$$\int_a^b f + g dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

(ii) fg ist integrierbar.
(iii) cf ist integrierbar und

$$\int_a^b cf dx = c \int_a^b f dx$$

Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann wurde am 17. September 1826 in Breselenz bei Dannenberg geboren und er starb am 20. Juli 1866 in Selasca bei Verbania am Lago Maggiore. Er starb an Tuberkulose.

Riemann war introvertiert und sehr schüchtern. Er hatte Schwierigkeiten im Umgang mit Menschen, insbesondere hatte er Schwierigkeiten, Vorträge zu halten. Viele seiner Mitmenschen hielten ihn für einen Hypochonder.

Er promovierte 1851 bei Gauß in Göttingen. Zu Riemanns Zeiten verdienten Dozenten sehr wenig, sie erhielten nur Kolleggelder, also die Gelder, die Studenten für die Vorlesung zahlten. Erst eine Professur war mit einem wesentlichen Gehalt verbunden. Es gab auch keine Altersversorgung, so dass Professoren bis zu ihrem Lebensende unterrichteten. Riemann wurde 1857 in Göttingen zum außerordentlichen Professor ernannt. Der Zeitpunkt war insofern glücklich, als er seit 1857 für drei Schwestern sorgen musste. 1859 wurde er zum ordentlichen Professor ernannt.

Wegen seiner angegriffenen Gesundheit reiste er nach er Italien.

Das wohl berühmteste, offene, mathematische Problem ist die Riemannsche Vermutung: Liegen alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

auf der Geraden $\Re s = \frac{1}{2}$*? Man beachte, dass die Zetafunktion für alle komplexen Zahlen erklärt ist.*

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, Aufgabe 23 zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 21.5.2014, um 8:15

Analysis II

Carsten Schütt SS 2014

25. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $c \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

26. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale:

$$(i) \quad \int x e^{x^2} dx \qquad (ii) \quad \int (e^x + x)^2 (e^x + 1) dx \qquad (iii) \quad \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$(iv) \quad \int \frac{1}{\sqrt{3x+5}} dx \qquad (v) \quad \int 2x\sqrt{x^2+9} dx \qquad (vi) \quad \int x\sqrt{x+1} dx$$

$$(vii) \quad \int \frac{1}{1+x^{\frac{1}{3}}} dx \qquad (viii) \quad \int x(\ln x)^2 dx \qquad (ix) \quad \int x^3 e^x dx$$

27. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Substitution oder partieller Integration.

$$(i) \quad \int_1^2 (2x+1)^5 dx \qquad (ii) \quad \int_3^6 x^2\sqrt{x^3+9} dx \qquad (iii) \quad \int_3^5 \frac{x}{(30-x^2)^2} dx$$

$$(iv) \quad \int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} dx \qquad (v) \quad \int_0^8 t\sqrt{1+t} dt$$

28. Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen, die auf einer in $[a,b]$ dichten Menge übereinstimmen. Zeigen Sie, dass die Integrale gleich sind.

29. (i) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von den beiden Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = 6 - x^2$ eingeschlossen wird.
(ii) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von den beiden Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 12 - 2x^2$ eingeschlossen wird.

Karl Weierstraß

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß wurde am 31. Oktober 1815 in Ostenfelde im Münsterland geboren und starb am 19. Februar 1897 in Berlin. Er unterrichtete als Lehrer an verschiedenen Gymnasien. Eine dieser Stellen erhielt er, weil er auch Turnen unterrichten konnte. Nebenher forschte er in der Mathematik und erhielt 1856 auf Grund seiner Forschungen eine Professur an der Universität Berlin.

Einer seiner Verdienste ist es, dass er eine Strenge im mathematischen Argumentieren einführte.

Georg Cantor und Sofia Kowalewskaja waren Studenten von ihm. Er unterrichtete Sofia Kowalewskaja privat, weil sie als Frau nicht an einer Universität studieren durfte.

Der Mondkrater Weierstrass ist nach ihm benannt.

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, Aufgabe 28 zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 28.5.2014, um 8:15

Analysis II

Carsten Schütt SS 2014

30. Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$(i) \quad \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \qquad (ii) \quad \int \sin^2 x dx \qquad (iii) \quad \int \cos^2 x dx$$

$$(iv) \quad \int \sin^4 x dx \qquad (v) \quad \int \cos^3 x \qquad (vi) \quad \int \cos^3 x \sin^2 x dx$$

31. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin^2 x &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \cos^2 x &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \end{aligned}$$

gilt. *Hinweis: Betrachten Sie die Funktionen f und g mit*

$$f(x) = \sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$g(x) = \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

32. Die Cantor Menge C ist die Menge aller reellen Zahlen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \qquad a_j \in \{0, 2\}$$

$\mathbb{R}$ sei mit der üblichen Metrik ausgestattet. Zeigen Sie
(i) $C \subset [0,1]$
(ii) C ist eine kompakte Menge.
(iii) Die Mächtigkeit der Cantor Menge ist gleich der des Kontinuums.

33. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann integrierbare Funktion und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in allen Punkten gleich der Funktion f ist, bis auf endlich viele Punkte. Zeigen Sie, dass g Riemann integrierbar ist und das Integral von g gleich dem von f ist.

Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor wurde am 19. Februar 1845 in Sankt Petersburg geboren und er starb am 6. Januar 1918 in Halle an der Saale. Er ist der Begründer der Mengenlehre. Er war auch an Philosohie und Literatur interessiert. So versuchte er nachzuweisen, dass die Werke von Shakespeare von Francis Bacon geschrieben worden sind.

Seit 1884 war er wegen einer manisch-depressiven Erkrankung in psychiatrischer Behandlung.

Auf dem internationalen Mathematiker Kongress 1904 bewies Julius König, dass die Mächtigkeit des Kontinuums nicht unter den von Cantor eingeführten Kardinalzahlen vorkommt, was die Mengenlehre in Frage stellen würde. Cantor fühlte sich gekränkt. Am darauffolgenden Tag zeigte Ernst Zermelo, dass der Beweis von König falsch war. Dies half Cantor nicht, die Kränkung zu vergessen.

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, Aufgabe 32 zu bearbeiten. Die Aufgabe muss nicht schriftlich bearbeitet werden, sie ist im Skript enthalten. Sie sollen in der Lage sein, die Aufgabe an der Tafel vorzurechnen.

Abgabe: Mittwoch, 4.6.2014, um 8:15

Analysis II

Carsten Schütt SS 2014

34. Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren und welche divergieren. Benutzen Sie dazu das Integralkriterium für Reihen. Es sei $j \in \mathbb{N}$ und $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = e$ und $a_{j+1} = e^{a_j}$.
(i)

$$\sum_{n\geq a_j} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)(\ln\ln\ln n)\cdots(\underbrace{\ln\cdots\ln}_{j} n)}$$

(ii)

$$\sum_{n\geq a_j}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)(\ln\ln\ln n)\cdots(\underbrace{\ln\cdots\ln}_{j} n)^2}$$

(iii) Zeigen Sie mit (ii), dass die Reihe

$$\sum_{n\geq a_j}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)(\ln\ln\ln n)\cdots(\underbrace{\ln\cdots\ln}_{j} n)^p}$$

für alle $p > 1$ konvergiert.

35. (i) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 1 + x + x^2$. Berechnen Sie die Taylorreihen von f mit den Mittelpunkten 0 und 1.

(ii) Berechnen Sie die Taylorreihe von arctan mit Mittelpunkt 0.
Hinweis: Vermeiden Sie, arctan *zu differenzieren. Benutzen Sie die Formel für die geometrische Reihe.*

(iii) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : (-1, \infty)$ sei durch $f(x) = (1 + x)^\alpha$ gegeben. Berechnen Sie die Taylorreihe von f mit Mittelpunkt 0.

36. Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{\pi}{x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

gegeben. Ist f eine stetige Funktion? Ist der Graph von f rektifizierbar?

37. (i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}) \\ -n^2 x + 2n & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0 & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, und die Funktion $\lim_{n\to\infty} f_n$ Riemann integrierbar sind. Zeigen Sie weiter, dass

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

Konvergiert die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig?
(ii) Die Folge $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sei gegeben durch

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, und die Funktion $\lim_{n\to\infty} f_n$ uneigentlich Riemann integrierbar sind. Zeigen Sie weiter, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = 1 \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$$

gelten. Konvergiert die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig?

Aufgabe 37 muss nicht schriftlich bearbeitet werden. Sie ist im Skript ausgearbeitet. Sie sollen in der Lage sein, sie an der Tafel vorzurechnen.

Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz wurde am 1. Juli 1646 in Leipzig geboren. Er starb am 14. November 1716 in Hannover. Er wird gerne als der letzte Universalgelehrte bezeichnet. Seine Interessen und sein Wirken waren vielfältig. Neben der Mathematik beschäftigte er sich mit Physik, Philosophie, Geschichte, Politik und Rechtswissenschaften.

1684 veröffentlichte Leibniz seine Darstellung der Integral- und Differentialrechnung. Isaac Newton hatte eine solche Darstellung bereits 1666 entwickelt, aber erst 1687 veröffentlicht. Hieraus resultierte ein langer, unerbittlicher Streit, wer dies zuerst entdeckt hatte und wer von wem abgeschrieben hat.

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, Aufgabe 34 zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 18.6.2014, um 8:15

Analysis II

Carsten Schütt SS 2014

38. Es sei $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion und $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_N\}$ bezeichne Partitionen von $[a,b]$. Die Länge des Graphens von Φ wird durch

$$L(\mathrm{Graph}(\Phi)) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{N} \|\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})\|_2$$

definiert.

Es sei $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion. $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ sind die Koordinatenabbildungen von Φ. In den Punkten a und b existieren die einseitigen partiellen Ableitungen und sie seien stetig dort. Zeigen Sie, dass die Länge des Graphens von Φ gleich

$$L(\mathrm{Graph}(\Phi)) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(t) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

ist.

Hinweis: Diese Formel wird genauso bewiesen, wie die Formel für die Länge von Graphen von Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

39. (i) Die Helix (Schraubenlinie) Es seien $a, b > 0$ und $H : [0,T] \to \mathbb{R}^3$ sei durch

$$\begin{aligned} H_1(t) &= a \cos t \\ H_2(t) &= a \sin t \\ H_3(t) &= b \cdot t \end{aligned}$$

definiert. Berechnen Sie die Länge ihres Graphens und machen Sie eine Zeichnung von der Helix.

(ii) (Goldene Spirale) Es seien $0 < a, b$. $\mathrm{Sp} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ ist durch $\mathrm{Sp}(0) = 0$ und für $0 < t \leq 1$ durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_1(t) &= a e^{-\frac{b}{t}} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \\ \mathrm{Sp}_2(t) &= a e^{-\frac{b}{t}} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

gegeben. Berechnen Sie die Länge des Graphen von Sp und machen Sie eine Zeichnung der goldenen Spirale.

40. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x = y = 0 \\ y\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wo ist f stetig und wo differenzierbar? Wo existieren die partiellen Ableitungen?

41. Es sei (x_0, y_0, z_0) ein Punkt auf der Fläche $z = f(x, y)$. Falls f in (x_0, y_0) differenzierbar ist, dann hat die Fläche im Punkt (x_0, y_0, z_0) eine Tangentialhyperebene, die durch

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = z - z_0$$

gegeben ist. Der Normalenvektor auf der Fäche im Punkt (x_0, y_0, z_0) ist

$$\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1\right)$$

Die Gerade durch (x_0, y_0, z_0) und parallel zu

$$\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, -1\right)$$

heißt die Normalengerade, d.h. die Normalengerade ist

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} x_0 + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} t \\ y_0 + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} t \\ z_0 - t \end{array} \right) \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Berechnen Sie die Tangentialhyperebene und die Normalengerade der Fläche $z = x^2 y$ im Punkt $(2, 1, 4)$.
(ii) Berechnen Sie die Tangentialhyperebene und die Normalengerade der Fläche $z = 4x^3y^2 + 2y$ in $(1, -2, 12)$.
(iii) Berechnen Sie die Tangentialhyperebene und die Normalengerade der Fläche $z = xe^{-y}$ in $(1, 0, 1)$.

Quadratur des Kreises

Unter der Quadratur des Kreises versteht man, nur mit Zirkel und Lineal aus einem Kreis ein Quadrat gleicher Fläche zu konstruieren. Hierbei sind nur endlich viele Konstruktionsschritte erlaubt. Ferdinand von Lindemann bewies 1882, dass dies nicht möglich ist. Deshalb spricht man metaphorisch bei einem schwierigen oder hoffnungslosen Problem auch von der Quadratur des Kreises.

Die Quadratur des Kreises ist ein sehr populäres Problem. Bis in die heutige Zeit versuchen Menschen, eine Konstruktion zu finden, wobei sie hartnäckig ignorieren, dass es bereits bewiesen wurde, dass dies nicht möglich ist.

Beim Beweis wird entscheidend ausgenutzt, dass π eine transzendente Zahl ist.

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, Aufgabe 38 zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 25.6.2014, um 8:15

Analysis II

Carsten Schütt SS 2014

42. Eine Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ist konvex, wenn für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$ und alle $t\in[0,1]$

$$f((1-t)x+ty)\leq(1-t)f(x)+tf(y)$$

gilt.
(i) Zeigen Sie, dass eine differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$

$$f(x)+\langle\nabla f(x),y-x\rangle\leq f(y)$$

gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn die Hesse Matrix in allen Punkten positiv semidefinit ist.

43. Es sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ durch

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

gegeben. Wo ist die Funktion (total) differenzierbar? Wo existieren die partiellen Ableitungen? Wo sind die partiellen Ableitungen stetig?

44. (i) Es sei die Funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ durch $f(x,y,z)=e^{xyz}$ gegeben und die Funktion $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ durch

$$g(r,s)=\begin{pmatrix}3r+s\\3r-s\\r^2s\end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie die Kettenregel, um $\frac{\partial f\circ g}{\partial r}$ und $\frac{\partial f\circ g}{\partial s}$ zu berechnen.
(ii) Es sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ durch $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ gegeben und $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ durch

$$g(\rho,\phi,\theta)=\begin{pmatrix}\rho\sin\phi\cos\theta\\\rho\sin\phi\sin\theta\\\rho\cos\phi\end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie die Kettenregel, um $\frac{\partial f\circ g}{\partial\rho}$ und $\frac{\partial f\circ g}{\partial\theta}$ zu berechnen.
(iii) Es sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ durch $f(x,y,z)=xy+yz$ gegeben und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ durch

$$g(t)=\begin{pmatrix}t\\\sin t\\e^t\end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie die Kettenregel,um $\frac{df\circ g}{dt}$ zu berechnen.

Friedrich Schiller (1759-1805):

...unabhängig von dem, was um mich herum gemeint und geliebkost wird, folge ich bloß dem Zwang entweder meiner Natur oder meiner Vernunft, und da ich nie Versuchung gefühlt habe, eine Schule zu gründen oder Jünger um mich her zu versammeln, so hat diese Verfahrensart keine Überwindung gekostet.... und wenn ich nicht gleichgültig sein kann, ob mich ein großes oder kleines Publikum kauft, so habe ich mich wenigstens auf dem einzigen Wege darum beworben, der meiner Individualität und meinem Charakter entspricht - nicht dadurch, daß ich mir durch Anschmiegung an den Geist der Zeit das Publikum zu gewinnen, sondern dadurch, daß ich es durch die lebhafte und kühne Aufstellung *meiner* Vorstellungsart zu überraschen und zu erschüttern suchte. Daß ein Schriftsteller, welcher diesen Weg geht, nicht der Liebling seines Publikums werden kann, liegt in der Natur der Sache, denn man liebt nur, was einen in Freiheit setzt, nicht was einen anspannt; aber er erhält dafür die Genugtuung, daß er von der Armseligkeit gehaßt, von der Eitelkeit beneidet, von Gemütern, die eines Schwunges fähig sind, mit Begeisterung ergriffen und von knechtischen Seelen mit Furcht und Zittern angebetet wird.

(An Fichte, 4. August 1795)

Abgabe: Mittwoch, 2.7.2014, um 8:15