Analysis II

Carsten Schütt SS 2015

1. Konvergiert die Folge
$$\left\{\frac{(10n)!}{n^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}?$$

2. Es sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ in zweimal stetig differenzierbar und $x_0\in(a,b)$. Dann gilt
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

(*Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Taylor.)*

3. (Bernoulli Ungleichung)
(i) Für alle r mit $r\geq 1$ und alle x mit $-1\leq x$ gilt
$$1+rx\leq(1+x)^r$$

(ii) Für alle r mit $0<r<1$ und alle $x\geq -1$ gilt
$$(1+x)^r\leq 1+rx$$

Zeigen Sie dies mit Hilfe der Ableitungen der Funktionen.

4. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Formel von L'Hôpital.
(i) Es seien $0<b<a$.
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{a^{ex}-b^{ex}}$$

(ii)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$

(iii)
$$\lim_{x\to 0}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}$$

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.

Bertrand Russel

Abgabe: Donnerstag, 23.4.2015, um 14:00

Analysis II

Carsten Schütt SS 2015

5. Es seien $y > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eindeutige Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r < y$ und

$$x = k \cdot y + r.$$

Wir definieren

$$\langle x \rangle_y = x \bmod y = r.$$

Es sei y eine irrationale Zahl mit $0 < y < 1$. Was ist die Menge der Häufungswerte der Folge

$$\{\langle ny \rangle_1\}_{n \in \mathbb{N}} \ ?$$

Existieren Limes Inferior und Limes Superior dieser Folge? Wenn ja, bestimmen Sie Limes Inferior und Limes Superior.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < \langle ny \rangle_1 < \epsilon$$

existiert. Um dies zu zeigen, beweisen Sie, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit

$$\langle \ell ny \rangle_1 \leq \frac{1}{2} \langle ny \rangle_1$$

existiert.)

6. (i) Betrachten Sie die Folge $\{\sin n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Welche Zahlen sind die Häufungswerte dieser Folge? Besitzt diese Folge Limes Inferior und Limes Superior? Wenn ja, welche Zahlen sind Limes Inferior und Limes Superior?
(ii) Betrachten Sie die Folge $\{\cos n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Welche Zahlen sind die Häufungswerte dieser Folge? Besitzt diese Folge Limes Inferior und Limes Superior? Wenn ja, welche Zahlen sind Limes Inferior und Limes Superior?
(iii) Betrachten Sie die Folge $\{\tan n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Welche Zahlen sind die Häufungswerte dieser Folge? Besitzt diese Folge Limes Inferior und Limes Superior? Wenn ja, welche Zahlen sind Limes Inferior und Limes Superior?

(Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5.)

7. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:
(i) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.
(ii) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

8. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es zu allen Punkten $x, y \in M$ mit $x \neq y$ zwei Umgebungen $U(x)$ und $U(y)$ mit $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den größten Genuss gewährt.

Brief von Gauß an Bolayi, Göttingen 2.9.1808

In: Paul Stäckel, Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolayi, B.G. Teubner, Leipzig 1899, S. 94.

Abgabe: Donnerstag, 30.4.2015, um 14:00

Analysis II

Carsten Schütt SS 2015

9. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ seien mit der diskreten Metrik ausgestattet. Welches sind die offenen Mengen, abgeschlossenen Mengen und kompakten Mengen? Welches sind die konvergenten Folgen?

10. Es sei (M, d) ein metrischer Raum.
(i) Der Grenzwert einer konvergenten Folge in M ist eindeutig.
(ii) Eine konvergente Folge in M ist eine Cauchy Folge.
(iii) Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge in M. Die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitze eine Teilfolge, die konvergiert. Dann konvergiert auch die Cauchy Folge und sie konvergiert gegen denselben Grenzwert.

11. Es sei K eine total beschränkte Teilmenge eines metrischen Raumes. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon).$$

12. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ seien mit den Metriken d_1 und d_2 ausgestattet, die für alle $s, t \in \mathbb{R}$ durch $d_1(s,t) = |s - t|$ und

$$d_2(s,t) = \left| \frac{s}{1+|s|} - \frac{t}{1+|t|} \right|$$

definiert sind. Zeigen Sie, dass d_2 eine Metrik ist. Zeigen Sie, dass die offenen Mengen in $(\mathbb{R}, d_1)$ und $(\mathbb{R}, d_2)$ dieselben sind. Zeigen Sie weiter, dass $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht vollständig ist.

Ob ich die Mathematik auf ein Paar Dreckklumpen anwende, die wir Planeten nennen, oder auf rein arithmetische Probleme, es bleibt sich gleich, die letztern haben nur noch einen höhern Reiz für mich.

Carl Friedrich Gauß

In: Wolfgang Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtnis, Leipzig 1856, S. 101.

Die 2-Fach-Bachelor Studenten brauchen die Aufgabe 12 nicht zu bearbeiten.

Abgabe: Donnerstag, 7.5.2015, um 14:00

Analysis II

Carsten Schütt SS 2015

13. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : X \to Y$ genau dann in einem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist, falls für alle Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

gilt.

14. (i) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Es seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in x_0 stetig sind. Zeigen Sie, dass dann auch $f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 stetig sind.
(ii) Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume. Die Funktion $f : X \to Y$ sei in x_0 stetig und $g : Y \to Z$ sei in $f(x_0)$ stetig. Zeigen Sie, dass dann $g \circ f$ in x_0 stetig ist.

15. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

punktweise konvergiert auf $\mathbb{R}$ und für alle $a > 0$ auf den Intervallen $(-\infty, -a]$ und $[a, \infty)$ gleichmäßig. Die Reihe konvergiert nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

16. Es seien für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = \frac{\cos(n \cdot x)}{n}$ definiert.
(i) Konvergiert die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise oder gleichmäßig? Falls sie konvergiert, gegen welche Grenzfunktion konvergiert sie?
(ii) Existieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ableitungen f_n'? Falls die Ableitungen existieren, konvergiert die Folge $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise oder gleichmäßig? Falls die Folge konvergiert, welches ist die Grenzfunktion?

Zu Eulers Zeiten war die Beweisführung noch nicht durchformalisiert. So hat Euler bewiesen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}},$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen $\mathbb{P}$ genommen wird. Man fragt sich, was diese Gleichung bedeuten soll, da auf beiden Seiten ∞ steht. Dies wurde später von Kronecker geklärt, der zeigte, dass für alle $s > 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Nun stehen auf beiden Seiten der Gleichung endliche Zahlen.

Abgabe: Freitag, 15.5.2015, um 10:00

Analysis II

Carsten Schütt SS 2015

17. Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann bezeichnen wir die Menge der Cauchy Folgen in (X,d) mit

$$\mathrm{CF}_X = \{x = \{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}} | \{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy Folge in } X\}.$$

Wir führen auf CF_X eine Äquivalenzrelation ein. Wir sagen, dass

$$\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{y(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

gilt, falls

$$\lim_{n\to\infty} d(x(n),y(n)) = 0.$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen von CF_X bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$ bezeichnen wir mit $\mathcal{CF}_X$. Wir definieren die Metrik $d_{\mathcal{CF}} : \mathcal{CF}_X \times \mathcal{CF}_X \to [0,\infty)$ durch

$$d_{\mathcal{CF}}([\{x(n)\}_{n\in\mathbb{N}}],[\{y(n)\}_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x(n),y(n)).$$

(i) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ auf CF_X eine Äquivalenzrelation ist.
(ii) Zeigen Sie, dass $d_{\mathcal{CF}}$ wohldefiniert ist und auf $\mathcal{CF}_X$ eine Metrik ist.

18. (i) Der $\mathbb{R}^n$ sei mit der Euklidischen Norm ausgestattet und $r \geq 0$. Die abgeschlossene Kugel $B_2^n(0,r)$ mit Radius r und ihr Rand $\partial B_2^n(0,r)$ sind kompakt.
(ii) Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Norm ist genau dann beschränkt, wenn sie total beschränkt ist.
(iii) Zeigen Sie, dass die offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen des $\mathbb{R}^n$ für alle Normen gleich sind.

19. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist Riemann-integrierbar. Verwenden Sie hierbei nur die Definition der Riemann-Integrierbarkeit.

Stefan Banach wurde am 30. März 1892 in Krakau geboren, er starb am 31. August 1945 in Lemberg. Er war einer der wichtigsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Er bestimmte die Entwicklung der Funktionalanalysis. Er traf sich mit Kollegen im Schottischen Café in Lemberg, wo sie gemeinsam arbeiteten. Wichtige Sätze der Funktionalanalysis wie der Satz von Hahn-Banach und der Satz von Banach-Steinhaus gehen auf ihn zurück. Besonders bemerkenswert ist das Paradoxon von

Banach-Tarski: Man kann die Euklidische Kugel mit Radius 1 in endlich viele Teile zerlegen, die man wiederum zu zwei Kugeln mit Radius 1 zusammensetzen kann. Man kann also mühelos ein Volumen verdoppeln!

Abgabe: Donnerstag, 21.5.2015, um 14:00

Analysis II

Carsten Schütt SS 2015

20. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d \tag{1}$$

ist ein Polynom 3. Grades. Die Diskriminante des Polynoms f ist

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Division durch a und die Substitution $z = w - \frac{b}{3a}$ das Polynom f in das Polynom

$$w^3 + pw + q \tag{2}$$

überführt, wobei

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \qquad\qquad q = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für die Diskriminanten Δ_z und Δ_w der Polynome (15) und (16) die Gleichung $\Delta_z = a^4 \Delta_w$ gilt.

21. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d \tag{3}$$

ist ein Polynom dritten Grades mit z als Variablen. Δ_z bezeichnet die Diskriminante des Polynoms (18). Zeigen Sie:
(i) Falls $\Delta_z > 0$, dann besitzt das Polynom drei verschiedene, reelle Nullstellen.
(ii) Falls $\Delta_z = 0$, dann sind alle Nullstellen reell.
Falls $\Delta_z = 0$ und $b^2 - 3ac = 0$, dann gibt es eine dreifache, reelle Nullstelle

$$z_1 = z_2 = z_3 = -\frac{b}{3a}.$$

Falls $\Delta_z = 0$ und $b^2 - 3ac \neq 0$, dann gibt es eine einfache, reelle Nullstelle und eine zweifache, reelle Nullstelle

$$z_1 = z_2 = \frac{9ad - bc}{2(b^2 - 3ac)} \qquad\qquad z_3 = \frac{4abc - 9a^2d - b^3}{a(b^2 - 3ac)}.$$

(Benutzen Sie Aufgabe 21. Überlegen Sie sich, dass das Polynom genau dann drei verschiedene, reelle Nullstellen besitzt, wenn die Werte des Polynoms in den kritischen Punkten verschiedene Vorzeichen haben.)

22. Ist die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Riemann-integrierbar? Beweisen oder widerlegen Sie dies. Verwenden Sie nur die Definition der Integrierbarkeit.

23. Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:
(i) $f + g$ ist integrierbar und

$$\int_a^b f + g dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

(ii) fg ist integrierbar.
(iii) cf ist integrierbar und

$$\int_a^b cf dx = c \int_a^b f dx$$

Gerolamo Cardano wurde am 24. September 1501 in Pavia geboren und er starb am 21 September 1576 in Rom. Er war Arzt, Philosoph und Mathematiker. Er erhielt Angebote von Papst Paul III., von König Christian III. von Dänemark und vom schottischen Erzbischof John Hamilton für die Stellung eines Leibarztes. Er lehnte die Angebote ab.

Er gilt als einer der letzten Universalgelehrten der Renaissance.

Die Kardanwelle ist nach ihm benannt, weil er 1548 eine solche Welle für eine Kutsche von Kaiser Karl V. entwarf.

Cardano hat auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik gearbeitet.

Der Mathematiker Tartaglia kannte die Lösung von kubischen Gleichungen ohne den quadratischen Term. Cardano überredete Tartaglia, ihm die Lösung zu verraten. Er musste aber schwören, dass er niemandem die Lösung verraten werde. Später erfuhr er, dass del Ferro die Lösung bereits kannte und er veröffentlichte die Lösung in seinem Buch *Ars magna sive de regulis algebraicis.* Tartaglia bezichtete ihn daraufhin des Meineids.

Abgabe: Donnerstag, 28.5.2015, um 14:00