Analysis I

Carsten Schütt — WS 2014/15

1. Falls Christa Purzelbäume schlägt, dann ißt Bruno Torte.
Christa ist genau dann übel, wenn Anton Likör trinkt und Christa Purzelbäume schlägt.
Falls Christa übel ist, dann ist Bruno besorgt und ißt Torte.
Entweder ist Anton traurig oder Christa ist übel.
Falls Anton traurig oder Bruno besorgt ist, dann schlägt Christa Purzelbäume.

Was geschieht?

2. (De Morgan) Es sei K eine nicht leere Menge und $\mathcal{M}$ eine nichtleere Menge von Teilmengen von K. Beweisen Sie
(i)
$$\left(\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M\right)^c = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M^c$$
(ii)
$$\left(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right)^c = \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M^c.$$

3. Beweisen Sie:
$$\mathbb{N}_0 = \{2m|m \in \mathbb{N}_0\} \cup \{2m+1|m \in \mathbb{N}_0\}.$$

4. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv, oder bijektiv?
(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n^2$
(ii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ mit $f(n) = n^2$
(iii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(n) = 2n$
Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.
Leopold Kronecker, 1886

Abgabe: Mittwoch, 12.11.2014 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2014/15

5. Beweisen Sie oder widerlegen Sie:
(i) Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$?
(ii) Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}_0$?
Falls es bijektive Abbildungen gibt, geben Sie sie an.

6. (i) Es sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und $x \in \mathbb{K}$. Beweisen Sie, dass die additiven und multiplikativen, inversen Elemente zu x eindeutig sind. Zeigen Sie weiter, dass $x = -(-x)$ und $x = (x^{-1})^{-1}$.
(ii) Es sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ ein geordneter Körper. Beweisen Sie:
1. Es gilt genau dann $x > 0$, wenn $-x < 0$.
2. Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt $|x| = |-x|$.

7. Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ Minimum, Maximum, Supremum und Infimum besitzen. Bestimmen Sie die Minima, Maxima, Suprema und Infima, falls sie existieren.

$$(i) \quad \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \qquad (ii) \quad \mathbb{N} \qquad (iii) \quad \mathbb{Z}$$

8. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

1892 begann Giuseppe Peano ein Projekt, die bekannten Sätze der Mathematik in logischer Strenge zu formulieren, das Formulario Matematico (beendet 1908), das er später auch für seine Vorlesungen benutzte, was ein pädagogischer Misserfolg wurde. 1901 wurde deshalb seine Lehrtätigkeit an der Militärakademie beendet. An der Universität konnte man ihm dagegen nicht hineinreden. 1900 fand Peano Anerkennung auf dem Internationalen Kongress für Philosophie in Paris.

Wikipedia

Abgabe: Mittwoch, 19.11.2014 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2014/15

9. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

10. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,$$

wobei die Binomialkoeffizienten durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

gegeben sind.

Benutzen Sie diese Gleichung, um zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

gilt.

11. Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gilt

$$2^n \leq \frac{n^n}{n!}.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 10.

12. (i) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $h_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei durch

$$h_n(k) = k^n$$

gegeben. Ist diese Abbildung injektiv? Ist die Abbildung surjektiv?
(ii) Sind die Abbildungen $\phi, \psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die durch

$$\phi(n,k) = n + k \qquad \text{und} \qquad \psi(n,k) = n \cdot k$$

definiert sind, injektiv oder surjektiv?

Alexander Grothendieck, einer der wichtigsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, starb am 13. November 2014, in Saint-Girons südlich von Bordeaux. Er revolutionierte die Algebraische Geometrie.

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 26.11.2014 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2014/15

13. Es sei q eine rationale Zahl. Dann setzen wir

$$S_q = \{p \in \mathbb{Q} | p < q\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass S_q ein Dedekind Schnitt von $\mathbb{Q}$ ist.
(ii) Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in \mathbb{Q}$

$$S_p + S_q = S_{p+q}.$$

gilt.
(iii) Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{Q}$ das additive Inverse $-S_p$ von S_p

$$-S_p = S_{-p}.$$

erfüllt.

14. Welche der Folgen konvergieren in $\mathbb{R}$ und welche divergieren? Bestimmen Sie die Grenzwerte, sofern diese existieren.

$$(i) \quad \left\{ \frac{2+11n}{3n+7} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (ii) \quad \left\{ \frac{2}{5n^2+6} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (iii) \quad \{2-(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

15. Welche der Folgen konvergieren in $\mathbb{R}$, welche divergieren? Bestimmen Sie die Grenzwerte, sofern diese existieren.

$$(i) \quad \left\{ \frac{2n^2+n+5}{10n^2+3n+1000} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (ii) \quad \left\{ \frac{2^n n!}{n^{n+1}} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (iii) \quad \left\{ \frac{n!}{10^n} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

16. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
(i) Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver, reeller Zahlen. Die Folge

$$\left\{ \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert genau dann in $\mathbb{R}$, wenn es eine Zahl $c > 0$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \leq c^{(2^n)}$ gilt.

(ii) Wenn es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Gleichung $a_i = x$, dann konvergiert diese Folge für $x > 0$ und der Grenzwert ist $\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$.

(Dieses Beispiel steht im Skript und muss nicht schriftlich bearbeitet werden. Das Beispiel soll durchgearbeitet werden und Sie sollen in der Lage sein, es an der Tafel vorzurechnen. Beachten Sie, dass einige Beweisschritte im Skript weggelassen wurden.)

Felix Bernstein wurde am 14. Februar 1878 in Halle an der Saale geboren, er starb am 3. Dezember 1956 in Zürich. Er lehrte in Göttingen. Er gründete 1918 in Göttingen das Institut für mathematische Statistik. 1919 wurde er zum Reichskommissar für Anleihen ernannt.1924 klärte er mittels statistischer Analyse den AB0-Blutgruppen Erbgang. 1934 wurde ihm von den Nazis der Lehrstuhl entzogen und er emigrierte in die USA.

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 3.12.2014 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2014/15

17. Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\epsilon :\quad |x_n - x_0| < \epsilon$

(ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\epsilon :\quad |x_n - x_0| < \epsilon$

(iii) $\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\epsilon :\quad |x_n - x_0| \leq \epsilon$

(iv) $\exists c > 0 \forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N_\epsilon :\quad |x_n - x_0| \leq c \cdot \epsilon$

18. Welche der Folgen konvergieren? Welches sind die Grenzwerte?

(i) $\left\{\frac{n^2}{n+2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *(ii)* $\left\{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

(iii) $\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *(iv)* $\left\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

19. (i) Es sei $J : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine strikt wachsende Abbildung, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $J(k) < J(k+1)$. Zeigen Sie, dass dann für alle $k \in \mathbb{N}$ $k \leq J(k)$ gilt.
(ii) Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, konvergente Folge und $\{x_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass die Teilfolge konvergiert und dass sie gegen den Grenzwert von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

20. Die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_1 = -\frac{1}{2}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(Aufgabe 20 muss nicht schriftlich bearbeitet werden, sie steht im Skript. Sie sollen in der Lage sein, die Aufgabe an der Tafel vorzurechnen.)

Julius Wilhelm Richard Dedekind wurde am 6. Oktober 1831 in Braunschweig geboren. Er starb am 12. Februar 1916 in Braunschweig. Er studierte in Berlin. Er lehrte in Göttingen, Zürich und Braunschweig. Er arbeitete auf dem Gebiet der Algebra. Dedekind spielte sehr gut Cello und Klavier und komponierte eine Kammeroper, zu der sein Bruder das Libretto schrieb.

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 10.12.2014 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2014/15

21. Benutzen Sie das Heron Verfahren, um $\sqrt{7}$ auf 5 Stellen hinter dem Komma genau zu berechnen. Wählen Sie $x_1 = 2$.

22. Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie, dass x_0 genau dann Häufungswert dieser Folge ist, wenn $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge hat, die gegen x_0 konvergiert.

23. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
(i) Limes Superior und Limes Inferior einer reellen, beschränkten Folge sind Häufungswerte dieser Folge.
(ii) Der Limes Superior einer beschränkten, reellen Folge ist der größte Häufungswert dieser Folge.
(iii) Der Limes Inferior einer beschränkten, reellen Folge ist der kleinste Häufungswert der Folge.

24. Es sei die Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$\phi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ \frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

gegeben. Finden Sie alle Häufungswerte und Limes Inferior und Superior der Folge

$$\{(-1)^n + (-1)^{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Everything is vague to a degree you do not realize till you have tried to make it precise.

Bertrand Russell

Abgabe: Mittwoch, 17.12.2014 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt — WS 2014/15

25. Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche divergieren?

$$(i) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$$

$$(iii) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \qquad\qquad (iv) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

26. Welche der Reihen konvergieren, welche divergieren?

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n^2+10} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+7}{n^3+12}$$

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad\qquad (iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

27. (i) Die Teilmenge $M=\{q\in\mathbb{Q}|q^2<2\}$ von $\mathbb{Q}$ hat in $\mathbb{Q}$ kein Supremum. Als Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat sie $\sqrt{2}$ als Supremum.
(ii) Die Teilmenge

$$M_{\sqrt{2}}=\{q\in\mathbb{Q}|q^2<2\}\cup\{q\in\mathbb{Q}|q\leq 0\}$$

von $\mathbb{Q}$ ist ein Dedekind Schnitt in $\mathbb{Q}$.

28. Man stapelt Dominosteine übereinander und bildet einen halben Torbogen. Alle Steine werden durch die Schwerkraft im Gleichgewicht gehalten. Welche Strecke kann dieser halbe Torbogen maximal überspannen, ohne dass Steine aus dem Gleichgewicht geraten?

Diese Aufgabe muss nicht schriftlich bearbeitet werden, sie steht im Skript. Sie sollen in der Lage sein, sie an der Tafel vorzurechnen.

29. Entscheiden Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen stetig sind. Verwenden Sie dabei nur die Definition der Stetigkeit.
(i) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=\sqrt{x}$.
(ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=|x|$.
(iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{falls } x\leq 0 \\ x & \text{falls } x>0 \end{cases}$$

Ein Biologe, ein Physiker und ein Mathematiker beobachten ein Haus. Das Haus ist leer. Zwei Menschen betreten das Haus und nach einer Weile verlassen drei Menschen das Haus. Der Biologe sagt:" Sie haben sich fortgepflanzt." Der Physiker sagt: "Es liegt ein Messfehler vor." Der Mathematiker sagt: "Wenn jetzt noch ein Mensch ins Haus geht, ist es leer."

Abgabe: Mittwoch, 7.1.2015 um 8:15.

30. (i) Gibt es eine Folge in den reellen Zahlen, für die jede reelle Zahl Häufungswert ist?
(ii) Gibt es eine Folge reeller Zahlen, für die die Menge der Häufungswerte gleich $[0,1]$ ist?
(iii) Gibt es eine Folge reeller Zahlen, für die die Menge der Häufungswerte gleich $(0,1)$ ist?
(iv) Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, deren Menge von Häufungswerten beschränkt und nicht leer ist. Entscheiden Sie, ob Limes Superior und Inferior existieren.

31. Die folgenden Zahlen sind in Dezimalbruchdarstellungen.

$$(i) \quad 0,\overline{076923} \qquad\qquad (ii) \quad 0,\overline{45}$$

Entscheiden Sie, ob diese Zahlen rational sind. Wenn sie rational sind, dann geben Sie sie als Quotient zweier ganzer Zahlen an.
(iii) Zeigen Sie, dass die reelle Zahl mit der Dezimalbruchdarstellung

$$0,n_1n_2n_3\dots$$

wobei

$$n_i = \begin{cases} 1 & i \text{ ist Quadratzahl} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad\qquad i \in \mathbb{N}$$

eine irrationale Zahl ist.

((iii) muss nicht schriftlich bearbeitet werden. Sie steht im Skript. Sie sollen in der Lage sein, die Aufgabe an der Tafel vorzurechnen.)

32. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle t mit $0 \le t \le 1$

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

gilt. Zeigen Sie, dass f in allen reellen Punkten stetig ist.

33. Es sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, es sei $x_0 \in X$ und $f : X \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in x_0 linksseitig stetig ist, wenn $g : X \cap (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ in x_0 stetig ist. Entsprechend definiert man die rechtsseitige Stetigkeit.
(i) Zeigen Sie, dass f genau dann in x_0 linksseitig stetig ist, wenn für alle Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \cap (-\infty, x_0]$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

gilt.
(ii) Zeigen Sie, dass eine Funktion genau dann in x_0 stetig ist, wenn sie links- und rechtsseitig stetig in x_0 ist.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet wurde am 13. Februar 1805 in Düren geboren und starb am 5. Mai 1859 in Göttingen. Er studierte in Paris. Seine erste wissenschaftliche Arbeit betraf die Vermutung von Fermat. Er wurde als 20jähriger Student eingeladen, an der Französischen Akademie der Wissenschaften über diese Arbeit einen Vortrag zu halten. Er lehrte in Berlin und Göttingen.

Abgabe: Mittwoch, 14.1.2015 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2014/15

34. Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^2$ gleichmäßig stetig?

35. Welche der Folgen konvergieren und welches sind die Grenzwerte?

(i) $\{n^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (ii) $\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (iii) $\{(n^2)^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$

(iv) $\{n^{\frac{1}{\ln n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ (v) $\left\{n^{\frac{1}{(\ln n)^2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (vi) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

Hinweis: Benutzen Sie in (i) die binomische Formel, um zu zeigen, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ *die Abschätzung* $n^{\frac{1}{n}}\le 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$ *gilt.*

36. Wo ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(t)=\begin{cases}-t & \text{für} \quad t\le 0\\ t^2 & \text{für} \quad t>0\end{cases}$$

stetig und wo ist sie differenzierbar?

37. (i) Es sei I ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann in $x_0\in I$ differenzierbar, wenn es ein $\eta\in\mathbb{R}$ gibt, so dass die Funktion $g:I\to\mathbb{R}$ mit

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x\neq x_0\\ \eta & x=x_0\end{cases} \tag{1}$$

in x_0 stetig ist.

(ii) Es sei I ein Intervall und $f:I\to\mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann in $x_0\in I$ differenzierbar, wenn es ein $\eta\in\mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $\epsilon>0$ ein $\delta>0$ gibt, so dass für alle x mit $|x-x_0|<\delta$ gilt

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\eta\right|<\epsilon.$$

In Quantorenschreibweise:

$$\exists\eta\in\mathbb{R}\forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall x,|x-x_0|<\delta: \quad \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\eta\right|<\epsilon.$$

(iii) Es sei I ein Intervall, $x_0\in I$, und $\delta>0$ mit $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq I$. Eine Funktion $f:I\to\mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, wenn die Einschränkung $f_{|(x_0-\delta,x_0+\delta)}:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to\mathbb{R}$ von f in x_0 differenzierbar ist. Wenn die beiden Ableitungen existieren, dann sind sie gleich.

Abgabe: Mittwoch, 21.1.2015 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2014/15

38. Es sei (a,b) ein Intervall in $\mathbb{R}$, es sei $x_0 \in (a,b)$ und $f:(a,b) \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in x_0 linksseitig differenzierbar ist, wenn $g:(a,b)\cap(-\infty,x_0] \to \mathbb{R}$ mit $g(x)=f(x)$ in x_0 differenzierbar ist. Wir bezeichnen die Ableitung von g in x_0 als die linksseitige Ableitung von f. Entsprechend definiert man die rechtsseitige Differenzierbarkeitkeit.

Zeigen Sie, dass eine Funktion genau dann in x_0 differenzierbar ist, wenn sie in x_0 links- und rechtsseitig differenzierbar ist und die linksseitige Ableitung gleich der rechtsseitigen ist.

39. Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 1 \\ \frac{2n+1}{n(n+1)}x + \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{2n+1}{n+1}\right) & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

gegeben. Wo ist f differenzierbar?

40. (i) Welches Rechteck mit Flächeninhalt 1 hat den kleinsten Umfang?
(ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

(iii) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 20.$$

Zwei Ballonfahrer haben in den Wolken die Orientierung verloren. Als sich die Wolken lichten, entdecken sie jemanden am Erdboden. Sie rufen ihm zu: "Wo sind wir?" Er antwortet: "In der Gondel eines Ballons." Die Ballonfahrer rufen zurück: "Sie sind ein Mathematiker." Er fragt: "Es stimmt, wie kommen Sie darauf?" Die

Ballonfahrer antworten: "Ihre Antwort ist absolut korrekt, aber zu nichts zu gebrauchen."

Abgabe: Mittwoch, 28.1.2015 um 8:15.