Analysis I

Carsten Schütt — WS 2013/14

1. Falls Christa Purzelbäume schlägt, dann isst Bruno Torte.
Christa ist genau dann übel, wenn Anton Likör trinkt und Christa Purzelbäume schlägt.
Falls Christa übel ist, dann ist Bruno besorgt und isst Torte.
Entweder ist Anton traurig oder Christa ist übel.
Falls Anton traurig oder Bruno besorgt ist, dann schlägt Christa Purzelbäume.

Was geschieht?

2. Weisen Sie die folgenden Aussagen nach:
Die Aussagen $\neg(A \vee B)$ und $\neg A \wedge \neg B$ sind logisch äquivalent.
Die Aussagen $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ sind logisch äquivalent.

3. Es sei K eine Menge und $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen mit $M \subseteq K$. Dann gilt

$$\left(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \right)^c = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M^c$$

wobei M^c das Komplement von M in K ist.

4. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen.
(i) (Regel von De Morgan) Es seien $M \in \mathcal{M}$ Teilmengen einer Menge K

$$\left(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M \right)^c = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M^c$$

wobei M^c das Komplement von M in K ist.
(ii)

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 13.11.2013 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2013/14

5. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$
(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

6. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
(i) Für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k < \ell$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$k^n < \ell^n.$$
(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$n! \leq n^n.$$
(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $5 \leq n$ gilt
$$n^2 < 2^n.$$
(iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $23^n - 1$ durch 11 teilbar.

7. (i) Beweisen Sie die Gleichung
$$\mathrm{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{N}).$$
Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit* $\phi(k, \ell) = 2^{\ell-1}(2k-1)$. *Benutzen Sie die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung: Jede natürliche Zahl größer oder gleich* 2 *kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden. Dieses Produkt ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.*
(ii) Zeigen Sie die Gleichung
$$\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \mathrm{card}(\mathbb{Q}).$$

8. (i) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $h_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei durch
$$h_n(k) = k^n$$

gegeben. Ist diese Abbildung injektiv? Ist die Abbildung surjektiv?
(ii) Sind die Abbildungen $\phi, \psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die durch

$$\phi(n,k) = n + k \qquad \text{und} \qquad \psi(n,k) = n \cdot k$$

definiert sind, injektiv oder surjektiv?

Johann Wolfgang von Goethe lobt in dem Aufsatz *Der Versuch als Vermittler von Subjekt und Objekt* die Sorgfalt, mit der die Mathematik in ihren Beweisen ihre Argumente Schritt für Schritt aneinander reiht:

Die Bedächtigkeit, nur das Nächste ans Nächste zu reihen oder vielmehr das Nächste aus dem Nächsten zu folgern, haben wir von den Mathematikern zu lernen, und selbst da, wo wir uns keiner Rechnung bedienen, müssen wir immer so zu Werke gehen, als wenn wir dem strengsten Geometer Rechenschaft schuldig wären

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 20.11.2013 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2013/14

9. Welche der Folgen konvergieren in $\mathbb{R}$ und welche divergieren? Bestimmen Sie die Grenzwerte, sofern diese existieren.

$$(i) \quad \left\{\frac{2+3n}{5n+7}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (ii) \quad \left\{\frac{2}{5n+6}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (iii) \quad \{1-(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

10. Welche der Folgen konvergieren, welche divergieren? Bestimmen Sie die Grenzwerte, sofern diese existieren.

$$(i) \quad \left\{\frac{n^2+n+5}{10n^2+3n+1000}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (ii) \quad \left\{\frac{n!}{n^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (iii) \quad \left\{\frac{n!}{2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

11. Welche der Folgen konvergieren? Welches sind die Grenzwerte?

$$(i) \quad \left\{\frac{n^2}{n+2^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (ii) \quad \left\{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(iii) \quad \left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (iv) \quad \left\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

12. Zeigen Sie: Eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist beschränkt.

13. (i) Es sei a_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge positiver, reeller Zahlen. Die Folge

$$\left\{\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_n}}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert genau dann, wenn es eine Zahl $c > 0$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \leq c^{(2^n)}$ gilt.

(ii) Wenn es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Gleichung $a_i = x$, dann konvergiert diese Folge für $x > 1$ und der Grenzwert ist $\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$.

(Dieses Beispiel steht im Skript und muss nicht schriftlich bearbeitet werden. Das Beispiel soll durchgearbeitet werden und Sie sollen in der Lage sein, es an der Tafel vorzurechnen. Beachten Sie, dass einige Beweisschritte im Skript weggelassen wurden.)

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders.

Johann Wolfgang von Goethe

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.
Abgabe: Mittwoch, 27.11.2013 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2013/14

14. (i) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Konvergiert die Folge

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \right\}_{n\in\mathbb{N}} ?$$

Falls die Folge konvergiert, finden Sie den Grenzwert.
(ii) Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge, so dass die Folge

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert. Konvergiert dann auch die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$? Beweisen Sie dies oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

15. Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche divergieren?

$$(i) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$$

$$(iii) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \qquad\qquad (iv) \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

16. Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}.$$

Zeigen Sie, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

17. Die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch $a_1 = -\frac{1}{2}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$a_{n+1} = a_n + a_n^2$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert. *(Aufgabe 17 muss nicht schriftlich bearbeitet werden, sie steht im Skript. Sie sollen in der Lage sein, die Aufgabe an der Tafel vorzurechnen.)*

Es lebte einst ein Mann, der das Drachentöten erlernte und der alles hergab, was er besaß, um diese Kunst zu erlernen. Nach drei Jahren war er ein Meister dieser Kunst. Leider fand er keine Gelegenheit, seine Fähigkeiten anzuwenden.

Zhuangzi, chinesischer Philosoph und Dichter, um 365 v.Chr.–290 v.Chr.

Daraufhin begann er zu unterrichten, wie man Drachen tötet.

René Thom, französ. Mathematiker, 2.9.1923-25.10.2002

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 4.12.2013 um 8:15.

Analysis I

Carsten Schütt WS 2013/14

18. (i) Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, konvergente Folge. Zeigen Sie, dass $\{a_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und die Grenzwerte sind gleich.
(ii) Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle, konvergente Folge. Zeigen Sie, dass $\{a_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und die Grenzwerte sind gleich.
(iii) Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle, konvergente Folgen. Weiter gelte für alle $n\in\mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \leq b_n$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(iv) Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle, konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Weiter sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und es gelte für alle $n\in\mathbb{N}$

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

19. Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, konvergente Folge und $\{x_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass die Teilfolge konvergiert und dass sie gegen den Grenzwert von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

20. Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die gegen 0 konvergiert und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle, beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

21. Welche der Reihen konvergieren, welche divergieren?

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n^2+10} \qquad\qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+7}{n^3+12}$$

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad\qquad (iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

22. Man stapelt Dominosteine übereinander und bildet einen halben Torbogen. Alle Steine werden durch die Schwerkraft im Gleichgewicht gehalten. Welche Strecke kann dieser halbe Torbogen maximal überspannen, ohne dass Steine aus dem Gleichgewicht geraten?

Wernher von Braun

And what is it that put America in the forefront of the nuclear nations? And what is it that will make it possible to spend twenty billion dollars of your money to put some clown on the moon? Well, it was good old American know how, that's what, as provided by good old Americans like Dr. Wernher von Braun!

Gather 'round while I sing you of Wernher von Braun
A man whose allegiance
Is ruled by expedience
Call him a Nazi, he won't even frown
"Ha, Nazi, Schmazi" says Wernher von Braun.

Don't say that he's hypocritical
Say rather that he's apolitical
"Once the rockets are up, who cares where they come down?
That's not my department" says Wernher von Braun.

Some have harsh words for this man of renown
But some think our attitude
Should be one of gratitude
Like the widows and cripples of old London town
Who owe their large pensions to Wernher von Braun.

You too may be a big hero
Once you've learned to count backwards to zero
"In German, oder English, I know how to count down
Und I am learning Chinese!" says Wernher von Braun.

Tom Lehrer, amerikanischer Mathematiker und Songwriter

Abgabe: Mittwoch, 11.12.2013 um 8:15.

23. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $a_n = 0$, falls in der Dezimaldarstellung von n eine Null auftritt und sonst $a_n = \frac{1}{n}$. Entscheiden Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

konvergiert oder divergiert.

24. Die Doppelfolge $\{a_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -1 & j = i+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Konvergieren die Doppelsummen

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} \ ?$$

Sind sie gleich?

25. Benutzen Sie das Cauchy Produkt, um

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$$

für alle x mit $|x| < 1$ zu beweisen. Berechnen Sie außerdem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

26. Die folgenden Zahlen sind in Dezimalbruchdarstellungen.

$$(i) \quad 0,\overline{076923} \qquad\qquad (ii) \quad 0,\overline{45}$$

$$(iii) \quad 0, n_1 n_2 n_3 \ldots$$

wobei $n_i = 1$ gilt, wenn i eine Quadratzahl ist, für alle anderen i gilt $n_i = 0$. Sind diese Zahlen rationale Zahlen? Falls ja, dann geben Sie sie als Quotienten zweier ganzen Zahlen an.

27. Es sei $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe. $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sei die Folge natürlicher Zahlen, so dass x_{p_k} die k-te nichtnegative Zahl der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Entsprechend seien $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die Indices der negativen Folgenglieder: x_{n_k} ist die k-te negative Zahl. Dann divergieren die Reihen

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} x_{n_k} \qquad\qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} x_{p_k}$$

(Diese Aufgabe befindet sich im Skript. Sie muss nicht schriftlich bearbeitet werden. Sie sollen in der Lage sein, sie an der Tafel vorzurechnen.)

"Ich wollte in meinem Garten einen Springbrunnen anlegen", schrieb Friedrich der Große am 25. Januar 1778 an Voltaire. Das Projekt endete jedoch in einem Fiasko. Der Preußenkönig blickte von seinem Schloss Sanssouci auf Brunnenanlagen, aus denen keine Fontänen in die Höhe schossen. Dabei sollte die Wasserkunst nach den neuesten Erkenntnissen der Hydraulik ausgeführt werden und selbst Versailles an Pracht übertreffen. "Euler berechnete die Leistung des Räderwerks, damit das Wasser in ein Bassin hinaufgelänge, über Kanäle wieder abfließe, um in Sans-Souci aufzusteigen. Meine Mühle wurde nach allen Regeln der Mathematik gebaut, und sie konnte keinen einzigen Wassertropfen weiter als fünfzig Schritt unter das Bassin hinaufpumpen. Eitelkeit der Eitelkeiten! Eitelkeit der Mathematik!"

Michael Eckert: Euler and the Fountains of Sanssouci.

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 18.12.2013 um 8:15.

28. (i) Bestimmen Sie eine Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $a_k \in \{0,1\}$ derart, dass

$$\frac{205}{48} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{a_k}{2^k}$$

gilt.
(ii) Bestimmen Sie eine Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ mit $a_k \in \{0,1,2\}$ derart, dass

$$13 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{a_k}{3^k}$$

gilt.
(iii) Bestimmen Sie eine Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in \{0,1,2\}$ derart, dass

$$\frac{1}{5} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

gilt.
(iv) Bestimmen Sie eine Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ derart, dass

$$\frac{1}{5} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{7^k}$$

gilt.

29. Beweisen Sie das Raabe-Kriterium:
(i) Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge strikt positiver, reeller Zahlen. Es gebe ein $c > 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{c}{n} \tag{1}$$

gilt. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(ii) Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge strikt positiver, reeller Zahlen. Falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \tag{2}$$

gilt, dann divergiert die Reihe.

30. Kann man das Raabe-Kriterium erfolgreich auf die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

anwenden?

31. Welche der folgenden Mengen haben dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$, welche haben dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$ und welche haben eine Mächtigkeit, die von der von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ verschieden ist?

(i) $[0,1]$ $\qquad$ (ii) $\{1,2,3,4\}$ $\qquad$ (iii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\qquad$ (iv) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

32. Eine Permutation der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist eine bijektive Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt unbedingt konvergent, wenn für alle Permutationen π die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konvergiert.
(i) Zeigen Sie, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ genau dann absolut konvergiert, wenn sie unbedingt konvergiert.
(ii) Zeigen Sie, dass für alle Permutationen π

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$$

gilt, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ unbedingt konvergiert.
Diese Aufgabe muss nicht schriftlich bearbeitet werden. Sie steht im Skript. Benutzen Sie Aufgabe 27.

Johannes Kepler schreibt in einer Selbstbeschreibung über sich in der dritten Person (Joshua und Anne-Lee Gilder: Der Fall Kepler, S. 32.):

Dieser Mensch hat ganz und gar eine Hundenatur. Er ist ganz wie ein verwöhntes Haushündchen. 1. Der Körper ist beweglich, dürr, wohlproportioniert. Die Nahrung ist beiden die gleiche, es macht ihm Spaß, Knochen abzunagen und harte Brotkrusten zu kauen. Er ist gefräßig, ohne Ordnung, sobald ihm etwas unter die Augen kommt, reißt er es an sich. Er ist selbst mit dem geringsten Essen zufrieden. 2. Sein Charakter ist ganz ähnlich. Zuerst macht er sich (wie ein Hund beim Herrn) beständig bei den Vorgesetzten beliebt..........

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 8.1.2014 um 8:15.

33. Es sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

bei dem der höchste Exponent $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist und der Koeffizient $a_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass p mindestens eine Nullstelle hat.

34. (i) Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$.
(ii) Es sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion derart, dass $f(0) = f(2)$ ist. Zeigen Sie, dass ein $x \in [0,1]$ existiert, für das $f(x) = f(x+1)$ gilt.

35. Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

und

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

gelten. Geben Sie für beide Ungleichungen Beispiele an, in denen keine Gleichheit herrscht.

36. Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkte Folgen in $[0,\infty)$. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n).$$

Geben Sie ein Beispiel an, bei dem in der Ungleichung keine Gleichheit herrscht. Gilt diese Abschätzung auch für alle beschränkten Folgen?

37. Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, deren Limes Inferior und Limes Superior existieren und gleich sind. Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und der Grenzwert gleich dem Limes Inferior bzw. Limes Superior ist.

Hilbert musste mitansehen, wie die weltberühmte mathematische und physikalische Tradition der Göttinger Universität durch die Nationalsozialisten nach ihrer Machtübernahme 1933 rücksichtslos zerstört wurde. Sogenannte Nicht-Arier wie Edmund Landau, Richard Courant, Max Born, Felix Bernstein, Emmy Noether, Otto Blumenthal und politisch Andersdenkende wie Hermann Weyl wurden zur Aufgabe ihrer Tätigkeit genötigt oder in die Emigration gezwungen. Als Hilbert bei einem Bankett 1934 von dem neuen preußischen Unterrichtsminister Bernhard Rust gefragt wurde, ob es denn stimme, dass sein Institut "unter dem Weggang der Juden und Judenfreunde" gelitten habe, erwiderte dieser: "Das Institut - das gibt es doch gar nicht mehr!"

Wikipedia

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 15.1.2014 um 8:15.

38. Es sei $0 < r < \infty$. Zeigen Sie dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$$

genau dann konvergiert, wenn $1 < r$ gilt.

39. Welche der Mengen besitzen Supremum, Infimum, Maximum oder Minimum? Bestimmen Sie sie, falls sie existieren.

$$(i)\quad [-1,1] \qquad (ii)\quad [-1,1) \qquad (iii)\quad \mathbb{N} \qquad (iv)\quad \mathbb{Q}$$

$$(v)\quad \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \,\middle|\, a_j \in \{0,2\} \right\} \qquad (vi)\quad \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

40. Welche der Folgen konvergieren und welches sind die Grenzwerte?

$$(i)\quad \{n^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (ii)\quad \left\{ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (iii)\quad \{(n^2)^{\frac{1}{n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(iv)\quad \{n^{\frac{1}{\ln n}}\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (v)\quad \left\{ n^{\frac{1}{(\ln n)^2}} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad (vi)\quad \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Hinweis: Benutzen Sie in (i) die binomische Formel, um zu zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ *die Abschätzung* $n^{\frac{1}{n}} \le 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ *gilt.*

41. Es sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in [0,1] \\ x & x \in [-1,0) \end{cases}$$

definiert. Wo ist f stetig und wo unstetig? Benutzen Sie nur die $\epsilon - \delta$-Definition zum Nachweis.

Emmy Noether

Am 20. Juli 1915 stellte Emmy Noether einen Antrag auf Habilitation im Fach Mathematik in Göttingen. Sie wurde dabei von Hilbert und Klein unterstützt. Da es Frauen nicht gestattet war sich zu hablitieren, wurde ihr Antrag kontrovers in der Fakultät diskutiert. Hilbert kommentierte dies: "*Eine Fakultät ist doch keine Badeanstalt.*" Hilbert und Klein setzten sich in der Fakultät durch.

Da die Habilitation von Frauen an preußischen Universitäten untersagt war, stellte die mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät einen Antrag an den preußischen Minister:

Eure Exzellenz
bittet die mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung der philosophischen Fakultät der Göttinger Universität ehrerbietigst, ihr im Falle des Habilitationsgesuches von Fräulein Dr. Emmy Noether (für Mathematik) Dispens von dem Erlaß des 29. Mai 1908 gewähren zu wollen, nach welchem Habilitation von Frauen unzulässig ist.

Der Antrag wurde abgelehnt.

Es sind alle Aufgaben von allen Studenten zu bearbeiten.
Abgabe: Mittwoch, 22.1.2014 um 8:15.

42. Die Fibonacci Zahlen sind durch die Rekursion

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ gegeben. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Mit Hilfe dieser Zahlenfolge hat Leonardo Fibonacci (1180-1241) das Wachstum einer Kaninchenpopulation beschrieben. Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *bezeichnet man als den Goldenen Schnitt. Zwei Strecken* a *und* b *mit* $a < b$ *stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes, wenn sich die größere zur kleineren Strecke verhält wie die Summe aus beiden zur größeren*

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}.$$

Der Goldene Schnitt spielt in der Architektur eine Rolle.

43. Finden Sie die Lösung der Differenzengleichung

$$x_n - \tfrac{3}{2}x_{n-1} + \tfrac{1}{2}x_{n-2} = 0 \qquad\qquad n \geq 2$$

mit $x_0 = a$ und $x_1 = b$. Konvergiert diese Folge? Falls sie konvergiert, was ist der Grenzwert?

44. Wo ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{für} \quad t \leq 0 \\ t^2 & \text{für} \quad t > 0 \end{cases}$$

stetig und wo ist sie differenzierbar?

45. (i) Es sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^{(x^x)}$ gegeben. Berechnen Sie die Ableitung von f.
(ii) Gibt es eine differenzierbare Funktion $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$g'(x) = \ln x?$$

46. Seien $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ und $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in 0 stetig sind. Definiere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \leq 0 \\ g(x) & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass h genau dann in 0 stetig ist, wenn $f(0) = g(0)$ gilt.

Als Mitglied der Académie war eine von Cauchys Pflichten die Begutachtung von eingesandten wissenschaftlichen Artikeln. Dieser Arbeit widmete er viel seiner Zeit, allerdings nicht unbedingt zur Freude der Autoren. So schrieb Niels Henrik Abel: "Cauchy ist verrückt, und man kann nichts dagegen tun. Allerdings ist er zur Zeit der einzige, der weiß, wie man Mathematik machen sollte."

Ähnliche schlechte Erfahrungen machten Galois und Poncelet. Es schien auch, dass Cauchy teilweise die Papiere der jungen Wissenschaftler verloren hatte, was ihm heftig vorgeworfen wurde. Michail Ostrogradski dagegen fand nur warme Worte für Cauchy, der den jungen Russen sogar mehrmals aus dem Schuldturm freikaufte, wenn er mal wieder seine Miete nicht bezahlen konnte.

wikipedia

Nur die 1-Fach Bachelor Studenten sind verpflichtet, die letzte Aufgabe zu bearbeiten.

Abgabe: Mittwoch, 29.1.2014 um 8:15.