Vortragsthemen

Jede Teilnehmende ist für ein Thema verantwortlich, das sie im Kurs vorstellen wird. Es gibt also insgesamt 15 Vorträge, 4 aus den Gebieten Reelle bzw. Komplexe Dynamik und 7 aus dem Gebiet Fraktale Geometrie. Bitte gebt neben einem Hauptvortragswunsch mindestens einen, besser zwei Alternativwünsche an. Es müssen dabei natürlich nicht alle Vorträge aus demselben Themenbereich stammen.

Reelle Dynamik

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Iteration von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder auch $f : [0,1] \to [0,1]$). Man erinnere sich, daß $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ die n-te Iterierte von f bezeichnet.

Periodische Punkte. Die Rolle des kritischen Punkts. Periodische Punkte, also Punkte, die von f nach endlichen vielen Schritten wieder auf sich selbst abgebildet werden, sind bei der Betrachtung der Dynamik sehr wichtig. Hier befindet sich das System nämlich im Gleichgewicht. Man unterscheidet periodische Punkte in *anziehende*, *abstoßende* und *indifferente* periodische Punkte. Ein anziehender periodischer Punkt stellt dabei ein stabiles Gleichgewicht dar (wie etwa die Mittellage bei einem schwingenden Pendel), ein abstoßender ein labiles, das durch geringe Störung wesentlich anderes dynamisches Verhalten aufweist.

Der zweite Teil des Vortrags erforscht die Rolle der kritischen Punkte (also der Nullstellen von f'). Für wichtige Funktionen, etwa für die logistische Familie, tritt folgendes Phänomen auf: Wenn die Funktion einen stabilen (d.h. anziehenden) periodischen Punkt besitzt, so scheint sich stets schon ein kritischer Punkt unter Iteration diesem anzunähern. Um diese Aussage zu beweisen, wird das Hilfsmittel der *Schwarzschen Ableitung* eingeführt. Obige Aussage läßt sich dann für Funktionen mit negativer Schwarzscher Ableitung — hierzu zählt u.a. die logistische Familie — leicht beweisen.

Die logistische Familie - das Feigenbaumdiagramm. Die logistische Familie, $x \mapsto \lambda x(1-x)$ (mit einem Parameter $\lambda \geq 1$) stellt — wie in unserer Vortragsübersicht beschrieben — ein einfaches Modell für Populationsentwicklung unter beschränkten Ressourcen dar. Motiviert aus dem ersten Vortrag kann man für ein festes λ versuchen, interessantes dynamisches Verhalten durch Iteration des kritischen Punktes $x = \frac{1}{2}$ zu entdecken. Trägt man dieses Verhalten gegen den Parameter λ auf, so erhält man das aus der Einführung bekannte *Feigenbaumdiagramm.* Das Ziel dieses Vortrags ist es, diese Familie ein wenig zu erforschen — sowohl experimentell als auch mathematisch. Interessant sind dabei vor allem die Phänomene der Periodenfenster und der Periodenverdopplung. Im Fall $\lambda > 4$, in dem der kritische Punkt nach ∞ entkommt, beschäftigt man sich mit der Menge aller Punkte, die unter Iteration von f das Intervall $[0,1]$ nicht verlassen. Es wird gezeigt, daß dies eine “fraktale” Menge, nämlich eine sogenannte Cantormenge ist.

Chaos. Was “Chaos” ist, dafür gibt es keine allgemein akzeptierte mathematische Definition. Diesem Vortrag liegt eine weitverbreitete Definition von Robert Devaney zugrunde. Neben dieser Definition und bestimmten typischen Eigenschaften von dynamischen Systemen wird auch von gewissen Systemen gezeigt, daß sie chaotisch sind, etwa von der Funktion $x \mapsto 4x(1-x)$ auf dem Intervall $[0,1]$.

Der Satz von Sarkovskii. Ziel dieses Vortrags ist es, einen Satz zu beweisen, der erstaunlich stark ist und dennoch durch bloße Anwendung des Zwischenwertsatzes zu beweisen ist; er gilt für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Folgerung aus diesem Satz ist, daß jede Funktion, die einen Periodischen Punkt der Periode 3 besitzt, auch periodische Punkte *aller* anderen Perioden besitzen muß.

Allgemeiner besagt der Satz, daß das Vorhandensein periodischer Punkte gewisser Perioden schon die Existenz periodischer Punkte anderer Perioden erzwingt. Dies führt zu einer Ordnung auf den natürlichen Zahlen (der “Sarkovskii-Ordnung”) mit der folgenden Eigenschaft: Hat f einen periodischen Punkt der Periode k und gilt $k \prec n$, so hat f auch einen periodischen Punkt der Periode n. (Bezüglich dieser Ordnung ist also 3 die kleinste und 1 die größte natürliche Zahl ...)

Fraktale Geometrie.

In den Beschreibungen dieses Teils arbeiten wir meist, der Einfachheit halber, mit fraktalen Objekten im zweidimensionalen Raum (d.h. der Ebene). Fast alle hier beschriebenen Konzepte funktionieren aber genauso für den n-dimensionalen Raum.

Topologische Dimension und Box-Dimension Die "topologische Dimension" eines Objektes ist stets eine ganze Zahl: Die Dimension einer Strecke ist 1, die eines Quadrates 2 und die eines Würfels 3. Allerdings ist es schon bei diesem Begriff gefährlich, sich nur auf die "Intuition" zu verlassen: so kann man etwa ein Quadrat als stetiges Bild eines Intervalls, also als "Kurve" erhalten! (Auch solche Kurven werden im Volksmund manchmal als "Fraktale" bezeichnet, auch wenn sie nach unserer Definition keine solchen sind!) Die formale Definition beruht auf der Idee, daß man eine eindimensionale Menge (etwa ein Intervall) stets mit beliebig kleinen Kugeln so überdecken kann, daß jeder Punkt in höchstens zweien dieser Kugeln liegt. Bei einer zweidimensionalen Menge ist dies nicht möglich, es gibt für eine solche Überdeckung (bei der die Kugeln klein genug sind) immer Punkte, die in dreien dieser Kugeln liegen.

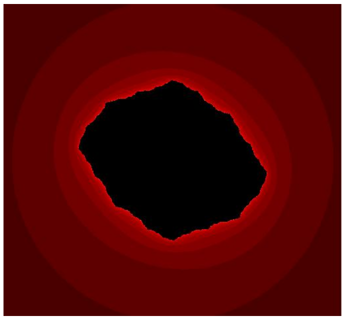
Der zweite Teil des Vortrags beschäftigt sich mit einer Möglichkeit, die "zerbrochene" Struktur gewisser Mengen besser zu berücksichtigen, indem als Dimension nicht nur ganze Zahlen zugelassen sind. Diese sogenannte "Box-Dimension" zählt, wie viele Quadrate einer festen Seitenlänge ε zur Überdeckung des Objekts benötigt werden. Eine Menge ist dann eindimensional, wenn man etwa $\frac{1}{\varepsilon}$ solcher Boxen benötigt; für zweidimensionale Mengen benötigt man dagegen $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Die Dimension tritt hier also im Exponenten auf, und es kann hier jede Zahl zwischen 0 und 2 (bzw. n im n-dimensionalen Raum) als Dimension auftreten.

Hausdorff-Dimension. Die Box-Dimension hat einige Eigenschaften, die man sich bei einem Dimensionsbegriff eigentlich nicht wünscht. Eine Möglichkeit, dies zu umgehen, ist die *Hausdorff-Dimension*. Um diese zu definieren, führt man zunächst das sogenannte "s-dimensionale Hausdorff-Maß" ein, eine Verallgemeinerung der Länge, des Flächeninhalts bzw. des Volumens für nicht-ganzzahlige Dimension s. Auch hier geht es wieder darum, das Objekt möglichst gut mit kleinen Mengen zu überdecken; allerdings läßt man — im Gegensatz zur Box-Dimension — zu, daß die Durchmesser dieser Mengen unterschiedlich sind.

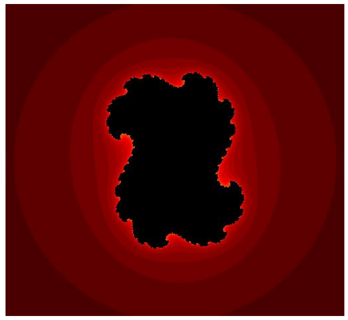
Die Hausdorff-Dimension ergibt sich hieraus dann wie folgt: Ist das s "zu klein" gewählt, so ist das s-dimensionale Maß der Menge ∞. So ist etwa die Länge (also das eindimensionale Maß) eines Quadrates sicherlich ∞. Andererseits ist für großes s dieses Maß 0: Eine Kurve hat gewiß keinen Flächeninhalt. Es gibt für jede Menge genau eine Dimension s, an der das Hausdorff-Maß von ∞ auf 0 springt: Dies ist die Hausdorff-Dimension.

Methoden zur Abschätzung der Hausdorff-Dimension. Selbst die Berechnung der Hausdorff-Dimension sehr einfacher Mengen auf der Basis der Definition ist sehr unhandlich. In diesem Vortrag sollen verschiedene Methoden behandelt werden, die Hausdorff-Dimension ohne diesen Aufwand zu berechnen. Obere Abschätzungen liefert stets die Box-Dimension, die wesentlich einfacher zu bestimmen ist. Eine untere Abschätzung kann man erhalten, wenn man ein geeignetes "Maß" auf der Menge definieren kann. Diese Methoden werden im folgenden so gut wie immer verwendet, um Dimensionen zu berechnen.

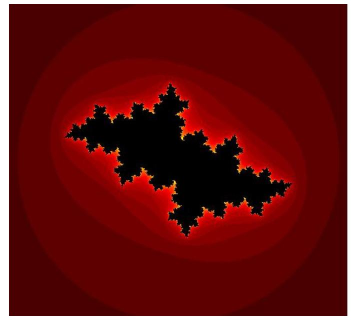
Selbstähnliche Mengen: Iterierte Funktionensysteme Ein Großteil der landläufig bekannten Fraktale sind sogenannte "selbstähnliche Mengen", wie das Sierpinski-Dreieck, die Koch-Kurve und der Heighway-Drache. Diese Mengen haben die Eigenschaft, daß sie sich als Vereinigung von kleinen Kopien ihrer selbst darstellen lassen: So besteht das Sierpinski-Dreieck aus drei halb so großen Sierpinski-Dreieken, und die Kochkurve aus vier auf ein Drittel verkleinerten Kochkurven.



(a) $c = -0.18 + 0.18i$



(b) $c = 0.3 + 0.1i$



(c) $c = -0.5 + 0.5i$

Abbildung 1: Drei Julia-Mengen, die Quasikreise sind.

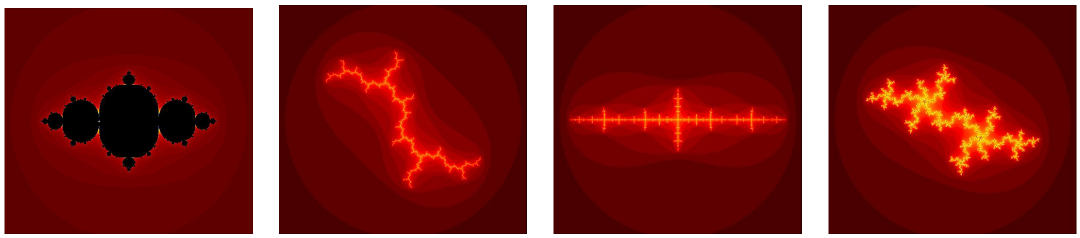
Hieraus leitet man die sogenannte “Selbstähnlichkeitsdimension” ab: Wir können das Sierpinski-Dreieck stets als Vereinigung von 3^n Sierpinski-Dreiecken des Durchmessers $\frac{1}{2^n}$ darstellen, also sollte die Dimension gerade $\frac{\log 3}{\log 2}$ sein.

Dieser Vortrag soll einige der bekannteren Fraktale vorstellen und die Methode ihrer Konstruktion formalisieren. Hierbei kommt man auf den Begriff des “iterierten Funktionensystems”: dies ist gerade das System von Abbildungen, die das gesamte Fraktal auf seine kleineren Teilfraktale abbildet. Das Fraktal ist dann ein *Fixpunkt* dieses Systems, und seine Existenz und Eindeutigkeit ist eine Konsequenz des “Banachschen Fixpunktsatzes”. Hierfür wird der sogenannte “Hausdorff-Abstand” zwischen Teilmengen der Ebene verwendet.

Dimension selbstähnlicher Mengen In diesem Abschnitt wird bewiesen, daß für die im vorigen Vortrag beschriebenen selbstähnlichen Fraktale die Selbstähnlichkeitsdimension tatsächlich sowohl der Hausdorff- als auch der Box-Dimension entspricht, unter der Voraussetzung, daß sich die kleinen Kopien nicht zu stark überschneiden. (Dieser Satz mag zunächst sehr einfach erscheinen, erfordert in der allgemeinen Version aber dennoch ein gutes Stück Arbeit.)

Zufällige Fraktale Fraktale Gebilde ergeben sich häufig aus zufälligen Prozessen. Ein einfachstes Beispiel ist es, bei der Erzeugung von Fraktalen wie der Kochkurve bei den verschiedenen Schritten eine zufällige Entscheidung einzubinden. Man kann dann über die Dimension der entstandenen Objekte mit positiver oder sicherer Wahrscheinlichkeit etwas aussagen. Natürlichere Beispiele von zufälligen Fraktalen sind *Perkolationen* oder die *Brownsche Bewegung*. Die Perkolation kann etwa das Versickern von Öl im Boden beschreiben. Die Brownsche Bewegung kann man sich als Bewegung von freischwebenden Partikeln vorstellen und modelliert etwa die Ausbreitung von Gasen.

Quasikreise Dieser Vortrag ist eine Anwendung der fraktalen Geometrie in der komplexen Dynamik. Für die Funktion $z \mapsto z^2$ ist die Juliamenge genau der Einheitskreis. Betrachtet man nun die Funktion $z \mapsto z^2 + c$ mit kleinem c, so scheint experimentell die Julia-Menge noch immer eine geschlossene Kurve (also ein “topologischer Kreis”, auch als “Jordankurve” bezeichnet) zu sein, der aber eine fraktale Struktur aufweist. In der Tat ist dies der Fall, und die Dimension dieses “Quasikreises” hängt stetig vom Parameter c ab; es läßt sich sogar eine asymptotische Formel für diese Dimension beweisen. Diese können wir mit unseren Methoden im Kurs nicht zeigen. Dieser Vortrag wird jedoch nachweisen, daß die Julia-Menge tatsächlich eine Jordan-Kurve ist, und sich dann im allgemeinen mit solchen “quasi-selbstähnlichen” Kreisen unter dem Gesichtspunkt der Fraktalen Geometrie beschäftigen. Insbesondere können wir zeigen, daß die Hausdorff-Dimension dieser Kreise eine wichtige Bedeutung für ihre geometrische Struktur hat.



(a) $c = -\frac{3}{4}$ (b) $c = i$ (c) $c \sim -1.5437$ (d) $c \sim -0.60703 + 0.60525i$

Abbildung 2: “Parabolische” Juliamenge und drei Dendriten. In 2(a) ist der indifferente Fixpunkt markiert.

Komplexe Dynamik

Dies ist der bei weitem bunteste Themenkomplex. Hier spielen viele mathematisch tiefliegende Konzepte auf, und wir werden einige Dinge nur anschaulich motivieren, nicht aber formal beweisen können. Im folgenden beschäftigen uns stets mit der Iteration von (komplexen) Polynomen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Dynamik komplexer Funktionen — die Juliamenge In diesem ersten Vortrag werden grundlegende Konzepte der Iteration von komplexen Polynomen erörtert. Die Begrifflichkeiten aus der reellen Dynamik können übertragen werden: Dazu zählt etwa auch die Rolle der kritischen oder der attraktiven Orbits.

Ein grundlegendes Konzept der komplexen Dynamik ist die sogenannte “Juliamenge”. Beginnt man mit der Iteration bei einem Wert $z \in \mathbb{C}$, dessen Betrag $|z|$ groß genug ist, so wird der Betrag unter Iteration nur immer stärker wachsen; wir sagen, der Punkt “entkomme nach ∞”. Wir betrachten nun die Menge $K(f)$ aller Punkte, die *nicht* nach ∞ entkommen, d.h., alle Punkte, deren Orbit beschränkt bleibt. Diese Menge nennt man die *ausgefüllte Juliamenge* von f. Ihr Rand $J(f) = \partial K(f)$ heißt die *Juliamenge* von f. Der Vortrag wird verschiedene Eigenschaften von $J(f)$ unter die Lupe nehmen; insbesondere ist f auf $J(f)$ chaotisch im Sinne von Devaney.

Zusammenhang von Juliamengen Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier wie auch im folgenden auf die Betrachtung von quadratischen Polynomen $f_c(z) = z^2 + c$ (das stellt aber bei diesem Vortrag keine wesentliche Einschränkung dar). Im Experiment bemerken wir, daß für sehr kleines c die Juliamenge einem Kreis ähnlich sieht (für $c = 0$ ist sie der Einheitskreis), während sie für sehr großes c total unzusammenhängend zu sein scheint. Wir fragen uns, wann die Juliamenge zusammenhängend ist, und stellen fest, daß dies genau dann der Fall ist, wenn der kritische Punkt 0 unter Iteration nicht entkommt, also in der ausgefüllten Juliamenge liegt. Dies läßt sich mit geometrischen Argumenten leicht beweisen.

Diese Erkenntnis motiviert die Definition der *Mandelbrotmenge* M: Sie ist die Menge aller Parameter c, für die die Juliamenge zusammenhängend ist (bzw. für die 0 nicht entkommt).

Die Struktur der Mandelbrotmenge. Einige einfache Eigenschaften der Mandelbrotmenge lassen sich leicht beweisen. Z.B. ist sie ist eine abgeschlossene und beschränkte Menge, die im Kreis mit Radius 2 enthalten ist. Sie schneidet die reelle Achse genau im Intervall $[2, -\frac{1}{4}]$: Hier findet sich unsere altbekannte logistische Familie wieder. Man kann leicht die Gebiete bestimmen, in denen f_c einen anziehenden Fixpunkt oder einen anziehenden periodischen Punkt der Periode 2 hat.

Man kann allgemeiner Bereiche betrachten, in denen die Funktion einen anziehenden Fixpunkt hat, sogenannte “hyperbolische Komponenten” der Mandelbrotmenge. Es gibt einige andere Typen von dynamischem Verhalten, die man in der Mandelbrotmenge finden kann: z.B. finden sich an den Bifurkationspunkten zwischen hyperbolischen Komponenten Parameter mit indifferenten periodischen Punkten, die in der Juliamenge liegen, aber dennoch gegen Störungen aus bestimmten Richtungen stabil sind; dies bezeichnet man als “parabolisches” Verhalten. (Der uns schon gut bekannte Bifurkationspunkt $3z(1-z)$ bzw. $z^2 - \frac{3}{4}$ ist ein solcher Parameter, siehe Abbildung 2(a).) Es kann aber auch bei Parametern in der Mandelbrotmenge das Innere der ausgefüllten Juliamenge leer sein, man spricht dann von “Dendriten”. Der einfachste Fall ist $c = 2$ (der dem Parameter $\lambda = 4$ entspricht); hier ist die Juliamenge das abgeschlossene Intervall $[-2, 2]$. Für alle anderen solchen Parameter ist die Juliamenge aber ein Fraktal.

Renormierung Wenn man die Mandelbrotmenge experimentell erforscht, erkennt man gewisse Strukturen, die sich aber mit unseren Methoden nicht mathematisch beweisen lassen. Es ist aber möglich, experimentell Gründe u.a. für ihre “Selbstähnlichkeit” — das Auftauchen kleiner Kopien von M überall in M selbst — plausibel zu machen. Dies ist die sogenannte “Renormierungstheorie”, auf die in der Themenübersicht verwiesen wurde: Innerhalb der Juliamenge gewisser Parameter findet man “kleine Juliamengen”, die genau wie die Juliamenge eines anderen Parameters aussehen, und dann auch dieselben Bifurkationen durchlaufen. Man stellt fest, daß sich auf diesen kleinen Juliamengen eine Iterierte dynamisch “genauso verhält” wie das entsprechende “echte” quadratische Polynom.

In der Tat kann man zeigen, daß diese Iterierte (auf einer geeigneten Menge) zu einem quadratischen Polynom topologisch — und sogar “quasikonform” — konjugiert ist. Dies führt dann dazu, daß man die Existenz von kleinen, homöomorphen Kopien der Mandelbrotmenge formal beweisen kann. Dies verwendet sehr tiefliegende und fortgeschrittene Methoden und Ergebnisse der komplexen Analysis, die den Rahmen dieses Kurses bei weitem sprengen würden.

Literatur

[D1] Robert L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin-Cummings Publishing, 1986

[D2] Robert L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, 1992

[DRU] J. Dufner, A. Roser, F. Unseld, *Fraktale und Julia-Mengen*, Verlag Harri Deutsch, 1998

[F1] Kenneth Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985

[F2] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley & Sons, 1990