

# Kursübersicht

Im folgenden findet Ihr Zusammenfassungen zu jedem der drei Teilgebiete, die wir im Kurs behandeln möchten. Die genaue Gewichtung der drei Gebiete ist noch nicht festgelegt und hängt von Eurem Interesse ab. Bitte laßt uns so bald wie möglich wissen, welches der drei Teilgebiete Euch am meisten interessiert. Wenn Ihr in der Zusammenfassung schon einen speziellen Themenkomplex ausmachen könnt, zu dem Ihr gerne einen Vortrag halten möchtet, teilt uns dies bitte mit.

**Dynamische Systeme.** Im folgenden werden wir oft von “dynamischen Systemen” sprechen. Dafür sollten wir zunächst einmal klären, was damit gemeint ist. Sei  $X$  irgendein Raum, der die Grundlage für unser dynamisches System bildet. Ein dynamisches System auf  $X$  ist dann eine Familie  $(f_t)_{t \in \mathbb{T}}$  von Funktionen  $f_t : X \rightarrow X$ , derart, daß  $f_{s+t}(x) = f_s(f_t(x))$  für alle  $x \in X$ . Hier ist  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$ . Im Fall  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$  sagen wir, daß wir ein dynamisches System “in diskreter Zeit” betrachten. Ist  $x \in X$ , so heißt die Menge  $\{f_t(x) : t \in \mathbb{T}\}$  der *Orbit* von  $x$ . Gewöhnlich interessiert man sich für das Verhalten von  $f_t(x)$  für  $|t| \rightarrow \infty$ .

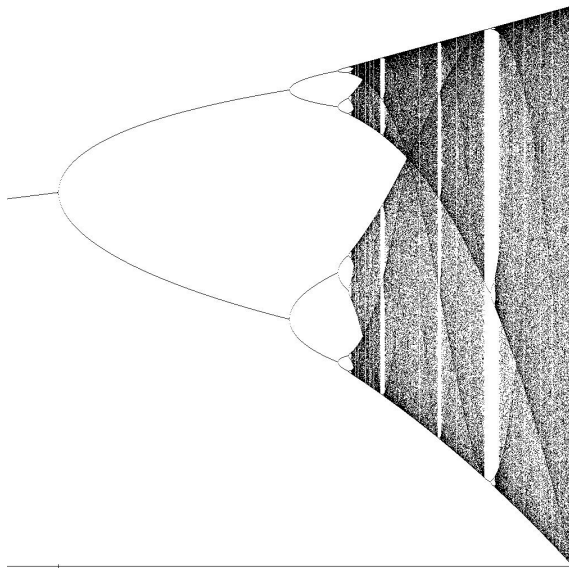
In unserem Kurs werden wir uns stets mit dem Fall  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$  beschäftigen. Hier können wir das dynamische System durch die Funktion  $f(x) := f_1(x)$  komplett beschreiben, denn  $f_n(x) = f^n(x)$ , wobei  $f^n$  die  $n$ -fache Hintereinanderausführung der Funktion  $f$  bezeichnet, die sogenannte  $n$ -te *Iterierte* von  $f$ . Ein Punkt  $x$  heißt *Fixpunkt* der Funktion, falls  $f(x) = x$ , und *periodischer Punkt*, falls  $f^n(x) = x$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Die (exakte) Periode eines periodischen Punktes ist dann das kleinste solche  $n$ .

In der Dynamik ist es oft hilfreich, ein dynamisches System in ein anderes, äquivalentes, umzuformen, welches dieselbe Dynamik besitzt. Kann man die Dynamik eines dieser beiden Systeme beschreiben, kennt man auch die des anderen. Dies wird durch den Begriff der *Konjugation* formalisiert. Zwei Funktionen  $f : X \rightarrow X$  und  $g : Y \rightarrow Y$  heißen (topologisch) konjugiert, falls es einen Homöomorphismus  $T : X \rightarrow Y$  (die Konjugation) gibt mit  $f = T^{-1} \circ g \circ T$ . Falls man fordert, daß  $T$  zusätzliche Regularitätsvoraussetzungen erfüllt, etwa konform oder stetig differenzierbar ist, so spricht man von “konformer” Konjugation etc.

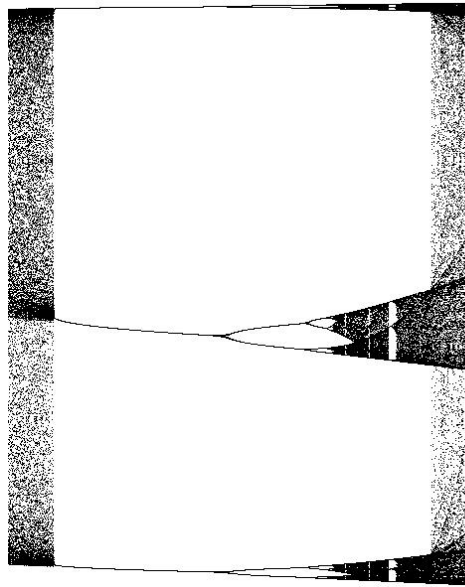
**1. Themenbereich: Reelle Dynamik.** Hier beschäftigen wir uns vor allem mit stetigen Funktionen  $f : I \rightarrow I$  auf dem reellen Intervall  $I = [0, 1]$  und deren Dynamik. Wir werden uns mit der Bedeutung von Fixpunkten, oder allgemeiner periodischen Punkten, für die Dynamik auseinandersetzen. Eine besondere Klasse solcher Funktionen sind die sogenannten “unimodalen” Funktionen, für die  $f(0) = f(1) = 0$  gilt, und für die ein Punkt  $c$  existiert derart, daß  $f$  auf  $[0, c]$  monoton steigend und auf  $[c, 1]$  monoton fallend ist. Die typischen Beispiele unimodaler Abbildungen stammen aus der “logistischen Familie”,  $f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1 - x)$ , wobei  $\lambda \in [1, 4]$ . Sie stellt das einfachste Modell einer Populationsentwicklung dar.

Das Studium dieser Familie ist daher wichtig, daß man an ihr als “einfaches” dynamisches System viele Konzepte exemplarisch betrachten kann, daß sie aber andererseits auch sehr komplexe Strukturen in sich verbirgt. Insbesondere ist es natürlich interessant, ob das System ein stabiles Gleichgewicht (bzw. einen stabilen Zyklus) enthält; d.h., ob die Funktion einen “attraktiven” Fixpunkt bzw. periodischen Punkt besitzt. Wir werden sehen, daß in diesem Fall der Orbit des kritischen Punktes  $c = \frac{1}{2}$  stets gegen diesen Zyklus konvergiert, so daß man experimentell nach einem solchen Gleichgewicht suchen kann: Wir iterieren den kritischen Punkt, und falls dieser nach einigen Iterierten nur zwischen endlich vielen Punkten pendelt, so gibt es wahrscheinlich einen attraktiven Orbit. Wir stellen fest, daß es für  $1 < \lambda < 3$  einen attraktiven Fixpunkt gibt (also ein positives Gleichgewicht für die Populationsentwicklung), für  $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$  gibt es einen attraktiven 2-Zykel, der sich wenig später in einen 4-Zykel teilt, und so weiter.

Damit befinden wir uns auch schon mittendrin in der wichtigen Frage, wie sich das Verhalten des Systems in Abhängigkeit vom Parameter  $\lambda$  ändert. Hierfür kann man das sogenannte *Feigenbaum-Diagramm* betrachten, das entsteht, indem man das oben genannte Experiment für jeden Parameter  $\lambda$  ausführt und das Ergebnis (also die Häufungspunkte des kritischen Orbits) gegenüber diesem Parameter aufträgt (siehe Abbildung 1(a)). Die oben genannte Entwicklung bezeichnet man als “periodenverdoppelnde Bifurkation”: Aus einem anziehenden periodischen Punkt



(a) Das Feigenbaum-Diagramm,  $\lambda \in [2.9, 4]$



(b) Das Periode 3-Fenster vergrößert und verzerrt

Abbildung 1: Feigenbaum-Diagramm

wird ein Zyklus der doppelten Periode. Wie man im Feigenbaumdiagramm erkennt, setzt sich diese Folge immer weiter fort. Den Grenzwert der Bifurkationen bildet der sogenannte “Feigenbaum-Punkt” bei  $\lambda \approx 3.5699$ . Ein weiteres interessantes Phänomen hängt mit der Periodenverdopplung zusammen: Man bilde das Verhältnis der Länge je zweier aufeinanderfolgender “Periodenfenster”, und betrachte das Verhältnis dieser Folge, wenn man sich auf den Feigenbaumpunkt zubewegt. Dann konvergiert diese Folge gegen die sogenannte *Feigenbaumkonstante*. Interessant ist, daß man bei jeder Familie, die eine solche Folge von Periodenverdopplungen aufweist, dieselbe Konstante beobachtet. Dieses Phänomen bezeichnet man als “Universalität”.

Ein weiterer Aspekt, den wir beim Betrachten des Feigenbaumdiagramms beobachten werden, ist die sogenannte “Selbstähnlichkeit”: Es gibt viele weitere “Periodenfenster” jenseits des Feigenbaumpunktes (im Feigenbaumdiagramm erkennt man z.B. ein Fenster der Periode 3), und in jedem dieser Fenster findet man wieder dieselbe Struktur der Periodenverdopplung (siehe Abbildung 1(b)). Diese Struktur erklärt sich durch die sogenannte Renormierungstheorie: Wenn man Abbildungen im Periodenfenster auf ein kleines Intervall einschränkt, erhält man eine Abbildung, die im wesentlichen wieder wie ein Element der logistischen Familie aussieht. Von diesen erwartet man, daß sie wieder dieselben Bifurkationen durchlaufen, und das beobachtet man dann auch im Experiment. Eine weitere Frage ist die Häufigkeit dieser Periodenfenster: Im Experiment erscheint es, als ob diese im Intervall  $[1, 4]$  dicht wären. Daß dies tatsächlich stimmt, ist einer der wichtigsten dynamischen Sätze, der in den letzten zehn Jahren bewiesen wurde. Der Beweis wurde vor etwa 7 Jahren unabhängig von Lyubich und von Graczyk und Swiatek bewiesen.

Der Feigenbaumpunkt ist ein sehr interessanter Parameter. Einerseits läßt sich im Verhalten des kritischen Orbits keinerlei Regularität erkennen. Andererseits ist auch die Situation bei benachbarten Parametern sehr kompliziert: Wenn man das Feigenbaumdiagramm betrachtet, findet man links beliebig dicht wieder Periodenfenster unterschiedlichster Perioden. Man könnte also sagen, mit dem Feigenbaumpunkt hat man in der logistischen Familie das “Chaos” erreicht. Hier bietet es sich für den Mathematiker an, die Frage zu stellen, was *Chaos* eigentlich bedeuten soll. Es gibt keine allgemein akzeptierte Definition von Chaos, aber verschiedene wichtige Konzepte,

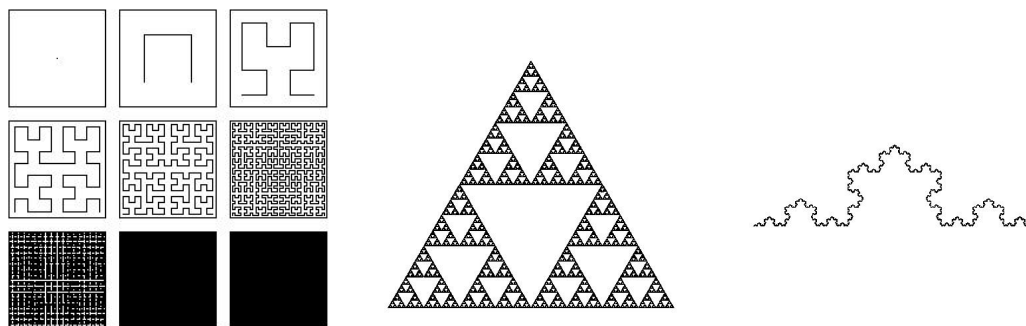


Abbildung 2: Peano-Kurve, Sierpinski-Dreieck und Kochsche Schneeflockenkurve.

die man als Indiz für “chaotisches” Verhalten auffassen kann. Eine mögliche Definition, wann ein dynamisches System chaotisch ist, wurde von Robert Devaney eingeführt und hat heute weite Verbreitung; diese Definition werden wir im Kurs behandeln. Ein anderes wichtiges Konzept ist das der “Entropie”; wie wir sehen werden, bildet die Feigenbaumabbildung den Übergangspunkt zu Systemen mit positiver Entropie.

Wenden wir uns nun einmal dem Fall von  $\lambda > 4$  zu. In diesem Fall bildet  $f_\lambda$  das Intervall  $I$  nicht mehr auf sich selbst ab; es gibt gewisse Punkte, die “entkommen”. (Insbesondere entkommt der kritische Punkt.) Man betrachtet nun die Menge  $\Lambda$  aller nichtentkommenden Punkte. Es stellt sich heraus, daß  $\Lambda$  stets eine total unzusammenhängende Menge ist, und daß  $f_\lambda$  auf dieser Menge stets dieselbe Dynamik hat. (Insbesondere zeigt sich, daß  $f_\lambda|_\Lambda$  chaotisch ist im Sinne von Devaney.) Die Methode, die hierfür verwendet wird, heißt *symbolische Dynamik* und wird in der Theorie der dynamischen Systeme sehr häufig benutzt.

Eine genauere Untersuchung der Dynamik der logistischen Familie (oder allgemeiner, von Selbstabbildungen des Intervalls) liefert die sogenannte *Knettheorie* (eine Form symbolischer Dynamik), die von den beiden Fields-Medaillisten John Milnor und William Thurston in dem Artikel “On Iterated Maps of the Interval” ausgearbeitet wurde.

**2. Themenbereich: Fraktale.** Dieses ist der geometrischste Teil unseres Kurses. Früher haben die Mathematik und allgemein die Naturwissenschaften die Natur in ein enges Korsett von einfachen Modellen zu stecken versucht. Die geometrischen Objekte mit denen man zu tun hatte ließen sich mit einer minimalen Anzahl von Veränderlichen parametrisieren: eine Gerade mit einer Variablen, eine Ebene mit zwei etc. Dem Objekt wies man einfach diese Anzahl als Dimension zu. Doch bald entdeckte man bedeutende Schwächen dieses Konzepts. Der italienische Mathematiker Peano fand eine Kurve, die ein gesamtes Quadrat überdeckt, andere fanden Kurven die sich in jedem Punkt selbst schneiden (Sierpinski-Dreieck) oder beschränkte Kurven mit unendlicher Länge (Koch-Kurve); siehe Abbildung 2. Dies führte zur Einführung eines natürlicheren ganzzahligen Dimensionsbegriffs, der *topologischen Dimension*. Dies hängt, wie der Name vermuten läßt, nur von der topologischen Struktur des Objekts ab. Allerdings ist auch dieser Begriff für unsere Zwecke ziemlich unzufriedenstellend, da er nicht zwischen einer Geraden und etwa dem Sierpinski-Dreieck zu unterscheiden vermag. Der Mathematiker Felix Hausdorff führte deshalb die nach ihm benannte, *Hausdorff-Dimension* ein, welche auch nichtganzzahlige Werte annehmen kann. Die formale Definition dieses Dimensionsbegriffs werden wir im Kurs behandeln. Die grundlegende Idee ist die folgende: Wenn wir das Intervall  $[0, 1]$  mit Mengen eines kleinen Durchmessers  $\varepsilon$  überdecken wollen, so werden wir stets etwa  $\varepsilon^{-1}$  solcher Mengen dafür benötigen. Wenn wir dagegen das Einheitsquadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  mit solchen Mengen überdecken, so benötigen wir etwa  $\varepsilon^{-2}$ . Die Dimension schlägt sich hier also im Exponenten nieder. Wenn wir nun etwa das Sierpinski-Dreieck betrachten, so stellen wir fest, daß wir nur ungefähr  $\varepsilon^{-\frac{\log 3}{\log 2}}$  solcher Mengen benötigen; die Hausdorff-Dimension des Sierpinski-Dreiecks ist daher  $\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$ .

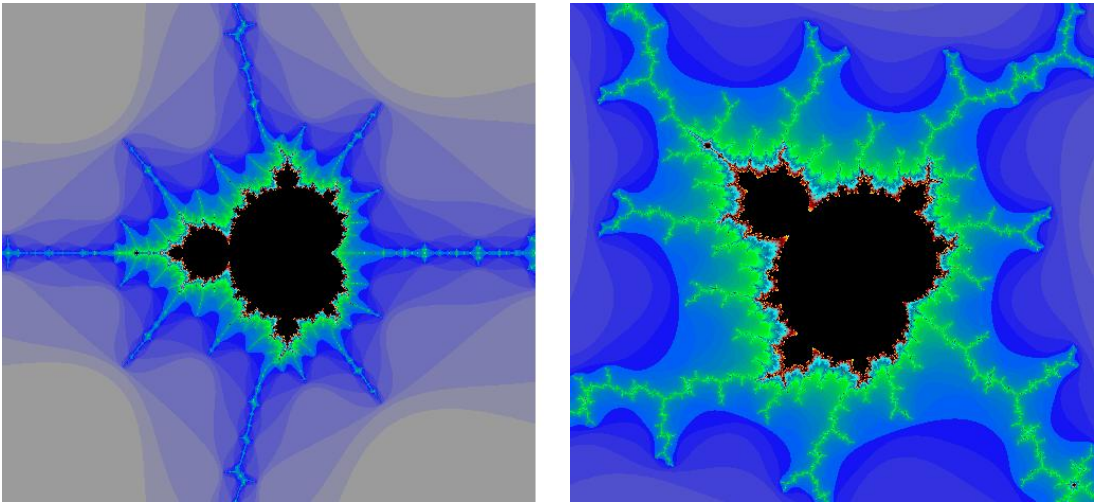


Abbildung 3: Zwei kleine “Mandelbrötchen” in der Mandelbrotmenge.

Objekte, deren Hausdorff-Dimension größer ist als die topologische Dimension sehen naturgemäß zerklüftet aus, weswegen sie Benoit Mandelbrot “Fraktale” getauft hat. Häufig wird der Begriff “Fraktal” aber auch für beliebige Objekte verwendet, die eine solche “zerbrochene” Struktur aufweisen. Oft bezieht man auch den bereits erwähnten Aspekt der *Selbstähnlichkeit* mit in die Definition des Fraktals ein (vgl. Abb. 3 und 4).

Die Bestimmung der Hausdorff-Dimension eines Objektes ist im allgemeinen nicht einfach, da die Definition etwas handlich ist. Zu den Verfahren, die man verwenden kann, gehört auch ein verwandter Dimensionsbegriff; die sogenannte *Box-Dimension*. Ebenso wollen wir einige weitere Verfahren, die uns im Laufe des Kurses zur Bestimmung von Hausdorff-Dimensionen nützlich sein werden, behandeln.

Für die oben erwähnten selbstähnlichen Fraktale kann man die Hausdorff-Dimension direkt bestimmen. Diese Fraktale kann man aus verkleinerten Kopien ihrer selbst aufbauen (die sich nicht zu stark überschneiden dürfen). So besteht das Sierpinski-Dreieck aus drei um den Faktor 2 verkleinerten Kopien seiner selbst. Hieraus ergibt sich die oben genannte Dimension  $\frac{\log 3}{\log 2}$ . Die Koch-Kurve besteht aus vier Kopien, die ein Drittel der ursprünglichen Größe aufweisen, und hat entsprechend Dimension  $\frac{\log 4}{\log 3}$ . Die genaue Formel, die auch zuläßt, daß verschiedene Teilstücke verschiedene Größenfaktoren haben, werden wir im Kurs beweisen.

**3. Themenbereich: Komplexe Dynamik.** In der komplexen Dynamik beschäftigen wir uns, wie der Name schon andeutet, mit der Iteration von komplexen Funktionen. Wir werden uns in diesem Kurs auf die Iteration von Polynomfunktionen  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränken, auf denen auch der Schwerpunkt der modernen Forschung liegt.

Ist  $p$  ein Polynom, so gilt, falls  $|z|$  groß genug ist, daß  $|p^n(z)| \rightarrow \infty$ , d.h., daß  $z$  ein sogenannter “entkommender Punkt” ist. Wir definieren  $K_p := \{z : p^n(z) \not\rightarrow \infty\}$ ;  $K_p$  ist die sogenannte *ausgefüllte Juliamenge*. Die *Julia-Menge*  $J_p$  ist der Rand von  $K_p$ ; das Komplement der Julia-Menge  $F_p := \mathbb{C} \setminus J_p$  wird auch als *Fatou-Menge* bezeichnet. (Die französischen Mathematiker Fatou und Julia begründeten Anfang des 20. Jahrhunderts die Theorie der Iteration holomorpher, also komplex differenzierbarer Funktionen.) Man kann zeigen, daß die Julia-Menge die größte Menge ist, auf der sich  $p$  *chaotisch* im Sinne des ersten Abschnitts verhält. Entsprechend ist auf der Fatou-Menge das Verhalten stabil. Mittlerweile sind die verschiedenen Möglichkeiten, wie sich eine Funktion auf einer Komponente der Fatou-Menge verhalten kann, genau bekannt. Die Juliamenge hat, außer in wenigen einfachen Fällen, eine sehr komplizierte Struktur. In der Tat ist sie dann stets ein Fraktal; d.h. ihre Hausdorff-Dimension ist größer als 1.

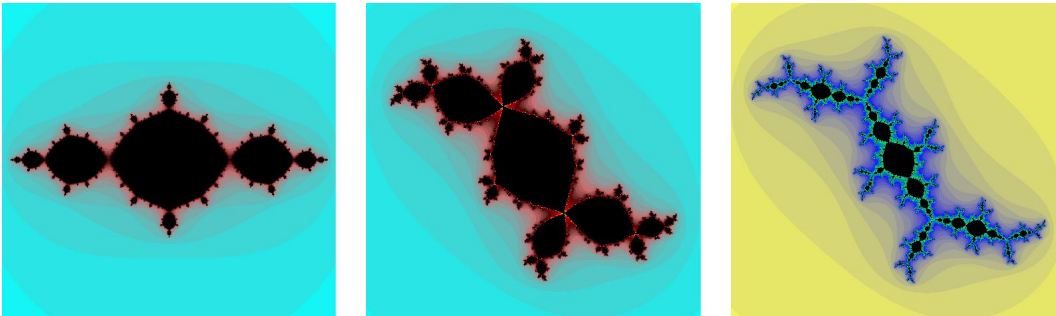


Abbildung 4: Renormierung: Links die “Basilica”, die Juliamenge der Funktion  $z \mapsto z^2 - 1$ , die bei der normalen Periodenverdopplung entsteht. In der Mitte die Juliamenge des “Rabbits” ( $c = -0.12 + 0.74i$ ). Wenn man von diesem aus nun eine Periodenverdopplung durchläuft, wird jede Fatou-Komponente durch eine Kopie der “Basilica” ersetzt (rechts).

Ein Polynom vom Grad  $d$  hat über den komplexen Zahlen genau  $d - 1$  Nullstellen der Ableitung, sogenannte *kritische Punkte* (gezählt gemäß Vielfachheit). Diese haben einen wichtigen Einfluß auf die Dynamik; im Prinzip kann jeder kritische Punkt genau einen Typ von dynamischem Verhalten erzeugen. Daher betrachtet man exemplarisch die quadratischen Polynome, also die Polynome vom Grad 2. Einerseits vereinfacht die Beschränkung auf einen kritischen Punkt die Betrachtung, andererseits tritt in dieser Familie aber auch schon jedes dynamische Phänomen auf. Ein quadratisches Polynom kann man stets durch (konforme) Konjugation in ein normiertes Polynom der Form  $p_c(z) = z^2 + c$  mit kritischem Punkt 0 und kritischem Wert  $c \in \mathbb{C}$  überführen. Insbesondere finden wir, wenn  $c$  reell ist, die logistische Familie wieder (Ist  $c \leq \frac{1}{4}$  reell, so ist  $p_c$  nämlich konform konjugiert zu  $f_\lambda$  mit  $\lambda = 1 + \sqrt{1 - 4c}$ ).

Wie im reellen Fall, und wie oben schon angedeutete, ist das Verhalten des kritischen Orbits entscheidend für die Dynamik von  $p_c$ . Man kann zeigen, daß die Juliamenge genau dann zusammenhängend ist, wenn der kritische Orbit nicht entkommt. Andernfalls ist sie, wie im Fall der logistischen Familie, total unzusammenhängend, und alle Parameter, für die dies geschieht, sind topologisch konjugiert. Will man nun Veränderungen des Parameters betrachten, definiert man daher

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} : p_c^n(0) \not\rightarrow \infty\};$$

$\mathcal{M}$  heißt die *Mandelbrotmenge* (siehe Abbildung 5). Wir sehen, daß das Innere der Mandelbrotmenge verschiedene Komponenten hat. Im Inneren der großen Kardioiden im Zentrum der Mandelbrotmenge hat  $p_c$  etwa einen anziehenden Fixpunkt; im links daran anschließenden Kreis einen anziehenden Punkt der Periode 2, und in der Tat beobachten wir — da die reellen Parameter der Mandelbrotmenge der logistischen Familie entsprechen — wieder eine Folge von Periodenverdopplungen. Wenn wir die reelle Achse verlassen, können wir aber auch Periodenverdrehfachungen, -vervierfachungen etc. beobachten. Diese *hyperbolischen Komponenten* bilden also eine Verallgemeinerung der Periodenfenster bei der logistischen Familie. Wenn wir die Mandelbrotmenge näher betrachten, sehen wir, daß die Fenster, in denen wir bei der logistischen Familie Selbstähnlichkeit entdeckt hatten, von kleinen Kopien der Mandelbrotmenge stammen, die wir überall auf dem Rand von  $\mathcal{M}$  wiederfinden (Abbildung 3). Auch deren Erscheinen wird wieder von der Renormierungstheorie erklärt.

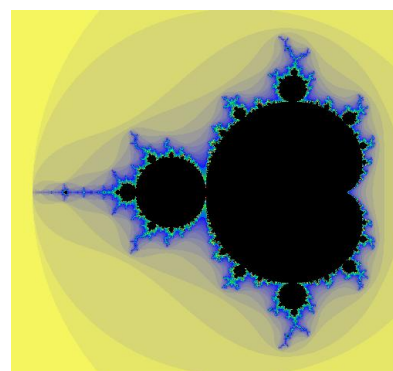


Abbildung 5: Die Mandelbrotmenge

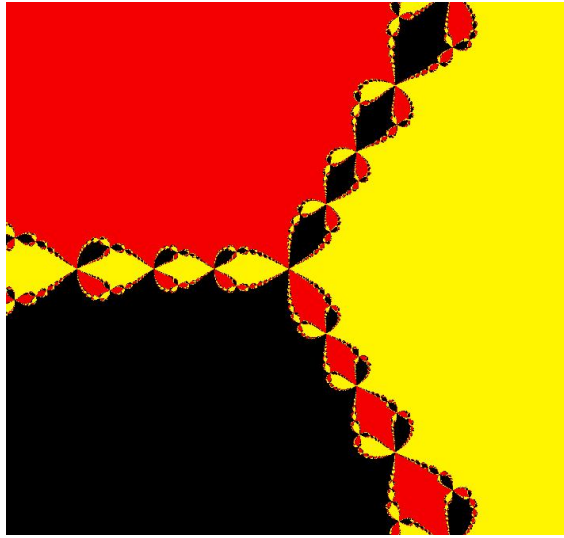


Abbildung 6: Newton-Verfahren für  $z^3 - 1$ .

Diese Phänomene finden in der komplexen Ebene besonders schönen geometrischen Ausdruck, da man die Juliamengen der “renormierten” Abbildung in der Juliamenge des Ausgangsparameters wiederfinden kann (Abbildung 4). Es gibt in der Mandelbrotmenge, die in den letzten zwei Jahrzehnten intensiv studiert wurde, viele interessante Entdeckungen und auch noch viele ungelöste Probleme. Im Fall der logistischen Familie ist es, wie bereits oben erwähnt, bekannt, daß die hyperbolischen Parameter dicht liegen; man vermutet, daß dies auch in der Mandelbrotmenge gilt. Zum Beispiel würde dies durch die berühmte “MLC”-Vermutung impliziert, die besagt, daß  $\mathcal{M}$  *lokal zusammenhängend* ist. (MLC steht für “Mandelbrot set Locally Connected”.) Diese zu beweisen ist vielleicht *das* wichtigste ungelöste Problem der holomorphen Dynamik.

Eine schöne Anwendung der komplexen Dynamik ist das (komplexe) *Newton-Verfahren*. Dieses ist ein Verfahren mit dem man sich (unter gewissen Voraussetzungen) von einem Startwert aus sukzessiv einer Nullstelle einer gegebenen reellen oder komplexen Funktion nähern kann. Man kann nun jedem Punkt in der Ebene die Nullstelle zuordnen, der er nach einigen Schritten am nächsten ist, und so die ganze Ebene mit verschiedenen Farben einfärben. Normalerweise würde man erwarten, daß Punkte nah bei einer Nullstelle gegen diese schnell konvergieren. Man nehme sich etwa das Polynom  $f(z) = z^3 - 1$ . Es hat drei Nullstellen, und zwar auf dem komplexen Einheitskreis bei 3, 7 und 11 Uhr. Wenn man nun die Färbung durchführt, so bestätigt sich weitgehend die Erwartung daß die Ebene in drei gleiche Tortenstücke aufgeteilt wird. Sieht man allerdings genauer hin auf dem Rand, so beobachtet man, daß alle drei Farben auf den Rändern überall zu sehen sind; eine Struktur, die sehr an das erinnert, was wir bei den Julia-Mengen beobachtet haben (siehe Abbildung 6). In der Tat erfaßt die Theorie von Fatou und Julia auch das Newton-Verfahren, d.h. im Falle eines Polynoms die Iteration von *rationalen Funktionen*, denen man wieder Fatou- und Juliamenge zuordnen kann. Es gibt etwa auch Fälle in denen eine offene Menge von Startwerten gegen gar keine Nullstelle konvergiert.

Alle drei behandelten Gebiete laden besonders zum Computerexperiment ein. Bereits mit sehr geringem Programmieraufwand lassen sich komplexe und teilweise auch schöne Gebilde erzeugen. Es gibt auch viele Probleme zum Darstellen von Fraktalen, Julia-Mengen und vielem mehr, etwa Winfeed unter “<http://www.math.exeter.edu/rparris/winfeed.html>”. Hier ist Mathematik zum Anfassen möglich.