Mathematische Grundlagen

1 Einführung

Bei diesen Notizen soll es sich um eine Übersicht der mathematischen Grundlagen handeln, die wir im Kurs benötigen werden. Einiges hiervon wird vielen schon bekannt sein, anderes wird noch im Kurs behandelt werden. Wichtig ist uns, einen (wenn auch vielleicht unvollständigen) Katalog zu erstellen, den ihr bei der Vorbereitung Eurer Vorträge zur Verfügung habt.

Des weiteren geht es uns darum, Euch mit der formalen mathematischen Ausdrucksweise vertraut zu machen. Denjenigen, die schon intensiveren Kontakt mit Mathematik hatten, wird diese Sprache schon bekannt sein; in der Schule lernt man sie jedoch oft nicht kennen. Die Fähigkeit, eine intuitive Vorstellung von einem Konzept in formale Mathematik zu verwandeln, gehört zum Rüstzeug einer Mathematikerin. Auch wenn wir in diesen Notizen nicht alles von den Grundlagen her entwickeln können, und auch nicht jeden Satz beweisen werden, bemühen wir uns dennoch, diesen Aspekt gebührend zu berücksichtigen. Daher haben wir auch versucht, die Abschnitte 2 bis 4, deren Inhalt zu großen Teilen aus der Analysis bekannt sein sollte, möglichst ausführlich darzustellen. Insbesondere werden wir bei vielen Sätzen darauf hinweisen, daß Ihr sie als Übungsaufgabe aus dem zuvor gesagten herleiten könnt. Wenn Ihr Euch im mathematischen Formalismus noch nicht ganz zu Hause fühlt, dann versucht doch, einige dieser Sätze einmal in aller Genauigkeit formal zu beweisen. Laßt Euch vom relativ großen Umfang dieser Ansammlung nicht abschrecken. Es ging darum, das Nachschlagen einfach zu machen, daher ist vieles enthalten, das nicht für jeden Vortrag im Kurs Bedeutung haben wird. Abschnitt 4 ist bei Abstand der wichtigste, und dessen Inhalt sollte größtenteils aus der Schule bekannt sein.

2 Grundlagen

Mengen. Mengenlehre bildet das Fundament der Mathematik. Im streng formalen logischen Aufbau bildet die Mengenlehre das Axiomensystem, aus dem alle anderen Aussagen abgeleitet werden. Wir werden uns hier nicht auf diesen Standpunkt stellen, sondern Mengen etwas naiver betrachten. Wer an einer formaleren Darstellung interessiert sein sollte, sei etwa auf das Büchlein “Naive Mengenlehre” von Halmos verwiesen. Eine *Menge* ist für uns stets eine Ansammlung von mathematischen Objekten, den *Elementen* der Menge. Ist A eine Menge und x ein Objekt, so schreiben wir “$x \in A$” für die Aussage “x ist Element von A.” Sind A und B Mengen, so ist A Teilmenge von B, in Zeichen $A \subset B$, falls jedes Element von A auch Element von B ist. Eine Menge wird durch ihre Elemente vollständig bestimmt: $A = B$ genau dann, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.

Sind A und B Mengen, so ist $A \cup B$ (die *Vereinigung*) die Menge aller Elemente, die in A oder B enthalten sind, und $A \cap B$ (die *Schnittmenge*) die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind. Ist p eine mathematische Eigenschaft (ein *Prädikat*), so ist $\{x \in A : x \text{ erfüllt } p\}$ die Menge aller Elemente von A, die p erfüllen. So definiert man auch die Menge $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$. Sind A und B Mengen, so ist $A \times B$, das *kartesische Produkt*, die Menge aller Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Die *leere Menge* bezeichnet man mit $\emptyset$.

Aussagen. Nun haben wir schon Prädikate kennengelernt. Ohne auf die formaleren Aspekte einzugehen, wollen wir hier kurz die Grundlagen der Aussagenlogik zusammenfassen. Anders als ein Prädikat, das von Unbekannten abhängt, ist eine *Aussage* stets wahr oder falsch. Ist z.B. p ein

Prädikat, so ist $\phi :=$ "x erfüllt p" eine Aussage. Die *Negation* einer Aussage ϕ, geschrieben $\neg\phi$, ist wahr genau dann wenn ϕ falsch ist. Die *Konjunktion* zweier Aussagen, $\phi \wedge \psi$, ist genau dann wahr, wenn sowohl ϕ als auch ψ wahr sind; die *Disjunktion* $\phi \vee \psi$ ist genau dann wahr, wenn eine der beiden Aussagen wahr ist. Insbesondere gilt $\phi \vee \psi = \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$. Die *Implikation* $\phi \Rightarrow \psi$ bedeutet: ψ ist wahr falls ϕ wahr ist. Die *logische Äquivalenz* wird erklärt durch $(\phi \Leftrightarrow \psi) := (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$.

Die Negation, Implikation und Äquivalenz vererben sich auf Prädikate, da letztere sich über die Aussagen der Form "x erfüllt p" definieren lassen. Also bedeutet $p \Rightarrow q$, daß alle x, die p erfüllen, notwendig auch q erfüllen. (q ist also eine *schwächere* Eigenschaft.) Ist p ein Prädikat, so sind "für alle x gilt p" und "es existiert ein x derart, daß p" — in Zeichen $\forall x : p$ und $\exists x : p$ — Aussagen. Es gilt $\neg(\forall x : p) \Leftrightarrow (\exists x : \neg p)$, und $\neg(\exists x : p) \Leftrightarrow (\forall x : \neg p)$.

Eine sehr wichtige elementare Eigenschaft ist die folgende: $(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\phi)$. (Die rechte Seite der Gleichung heißt *Kontraposition* von $\phi \Rightarrow \psi$.) Will man $\phi \Rightarrow \psi$ beweisen, ist es oft sinnvoll zu überlegen, ob die Kontraposition evtl. einfacher zu beweisen ist.

Funktionen und Relationen. Sind A und B Mengen, so ordnet eine *Funktion* $f : A \to B$ jedem Element von f genau ein Element $f(x) \in B$ zu. Eine *Relation* $\sim$ zwischen A und B bezeichnet ein Verhältnis zwischen Elementen von A und Elementen von B. Dabei kann ein Element von A zu mehreren Elementen $b \in B$ äquivalent sein (in Zeichen $a \sim b$).

Bemerkung. Dies ist natürlich keine formal mathematische Definition. Wenn man es genau nehmen will, kann man eine *Relation* $\sim$ einfach als eine Menge von Paaren in $A \times B$ definieren. $a \sim b$ ist dann nur eine Schreibweise für $(a, b) \in \sim$. Eine Funktion ist eine Relation f derart, daß für jedes $x \in A$ die Menge $\{b : (x, b) \in f\}$ einelementig ist. Das eindeutig bestimmte Element dieser Menge wird dann als $f(x)$ bezeichnet.

Definition. Sei $R \subset A \times B$ eine Relation und $X \subset A$. Dann definieren wir

$$R(X) := \{y \in B : \exists x \in X : xRy\}$$

und

$$R^{-1} := \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}.$$

R^{-1} ist eine Relation zwischen B und A und heißt *Umkehrrelation* von R. Ist insbesondere $R = f : A \to B$ eine Funktion, so ist $f(X)$ das *Bild* von X unter f. f^{-1} ist im allgemeinen nur noch eine Relation; für $Y \subset B$ wird $f^{-1}(Y)$ das *Urbild* von Y unter f genannt.

Definition. Sei $\sim$ eine Relation auf A (d.h. $\sim \subset A \times A$). $\sim$ heißt

- *reflexiv*, falls gilt: $\forall x \in A : x \sim x$;
- *symmetrisch*, falls gilt: $\forall x, y \in A : (x \sim y \Rightarrow y \sim x)$;
- *antisymmetrisch*, falls gilt: $\forall x, y \in A : (x \sim y \wedge y \sim x) \Rightarrow x = y$.
- *transitiv*, falls gilt: $\forall x, y, z \in A : (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z$;
- *total*, falls gilt: $\forall x, y \in A : x \sim y \vee y \sim x$.

Definition. Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation $\sim$ wird als *Äquivalenzrelation* bezeichnet. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation $\leq$ heißt *Ordnungsrelation.*

Beispiel. Sei A die Menge aller Menschen. Die Relation "a und b sind Geschwister" ist eine Äquivalenzrelation. Die Relation "a stammt von b ab" ist eine Ordnungsrelation. (Dabei nehmen wir die Konvention an, daß jeder Mensch von sich selbst abstammt.) Die Relation $\leq$ auf den rellen Zahlen ist eine Ordnungsrelation. (Beweis?)

Definition. Sei $f : A \to B$ eine Funktion. Dann heißt f

- *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $f(x_1) \neq f(x_2)$;

- *surjektiv*, falls für jedes $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$ (d.h. falls $f(A) = B$);
- *bijektiv*, falls f injektiv und bijektiv ist.

Bemerkung. f^{-1} ist genau dann eine Funktion von B nach A, falls f bijektiv ist. f^{-1} heißt dann *Umkehrfunktion* von f.

Definition. Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so heißt $g \circ f : A \to C$, $x \mapsto g(f(x))$ *Hintereinanderausführung* von g nach f. Ist $f : A \to A$, so bezeichnen wir die n-fache Hintereinanderausführung $f \circ f \circ \cdots \circ f$ mit f^n.

Ordnungsrelationen. Im folgenden sei stets A eine Menge und $\leq$ eine Ordnungsrelation auf A und $X \subset A$.

Definition. X heißt von oben (bzw. von unten) *beschränkt*, falls ein $a \in A$ existiert derart, daß für alle $x \in X$ $x \leq a$ (bzw. $a \leq x$) gilt. a heißt dann *obere* (bzw. *untere*) *Schranke* von X.

Definition. Ein Element $x \in X$ heißt *maximal* (*minimal*), falls außer x kein $y \in X$ mit $x \leq y$ ($y \leq x$) existiert. x heißt *größtes (kleinstes) Element* von X, falls für alle $y \in X$ gilt: $y \leq x$ ($x \leq y$). Ist x größtes bzw. kleinstes Element von X, so schreibt man $x = \max X$ bzw. $x = \min X$.

Definition. Eine größte obere (bzw. kleinste untere) Schranke a von X heißt *Supremum* (bzw. *Infimum*) von X; in Zeichen $a = \sup X$ (bzw. $a = \inf X$).

Lemma. Maximum und Supremum (bzw. Minimum und Infimum) einer Menge sind eindeutig, falls sie existieren. Jedes Maximum von X ist auch Supremum von X (und jedes Minimum ist ein Infimum).

Beweis. Sei zunächst a ein Maximum von X; wir zeigen, daß $a = \sup X$. Offensichtlich ist a obere Schranke von X. Sei b eine weitere obere Schranke von X. Wegen $a \in X$ gilt dann nach Definition der oberen Schranke $a \leq b$.

Seien nun a und b zwei Suprema von X. Dann gilt nach Definition $a \leq b$ und $b \leq a$, also $a = b$. Der Beweis für Minimum und Infimum geht analog. ∎

Definition. Die Ordnung $\leq$ auf X heißt *Wohlordnung*, falls jede nichtleere Teilmenge von X ein Minimum besitzt.

Definition. X heißt *ordnungsvollständig* (bezüglich $\leq$), falls jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

Lemma. In einer ordnungsvollständigen Menge hat jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge A ein Infimum.

Beweis. Es sei Y die Menge aller unteren Schranken von X. Nach Voraussetzung ist Y nichtleer und nach oben beschränkt. Nach Voraussetzung existiert daher $y := \sup Y$. Da jedes $x \in A$ eine obere Schranke von Y ist y nach Definition des Supremums untere Schranke von A. Also gilt $y \in Y$, d.h. y ist größte untere Schranke von A. ∎

Elementare Zahlenmengen. Wir setzen die folgenden Zahlenmengen als bekannt voraus:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\} \\ \mathbb{R} & \end{aligned}$$

heißen die Mengen der *natürlichen*, *ganzen*, *rationalen* und *reellen* Zahlen; es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Bemerkung. Es ist möglich, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ von $\mathbb{N}$ ausgehend zu konstruieren, hierfür schaue man in einem Lehrbuch der Analysis nach. Wir werden einfach einige grundlegende Eigenschaften dieser Mengen voraussetzen.

Die obigen Zahlenmengen sind mit der üblichen Addition $+$, Multiplikation $\cdot$ und (totalen) Ordnung $\leq$ ausgestattet; es gelten die bekannten Rechenregeln.

Axiom. $\mathbb{N}$ ist wohlgeordnet.

Axiom. $\mathbb{R}$ ist ordnungsvollständig.

Bemerkung. Dies ist die wesentliche Eigenschaft, die $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Zum Beispiel hat $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ in $\mathbb{Q}$ kein Supremum. (In $\mathbb{R}$ hat diese Menge das Supremum $\sqrt{2}$.)

Satz. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Menge, und $a_0 \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A. Dann ist a_0 genau dann Supremum von A, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A : a > a_0 - \varepsilon. \tag{*}$$

Beweis. Angenommen (*) stimmt nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle $a \in A$ gilt $a \leq a_0 - \varepsilon$. Somit wäre $a_0 - \varepsilon$ ebenfalls obere Schranke für A. Also ist a_0 nicht das Supremum.

Um die umgekehrte Richtung zu beweisen, nehmen wir an, daß a_0 kein Supremum von A ist. Dann gibt es also eine obere Schranke $b < a_0$ von A. Setze $\varepsilon := a_0 - b > 0$. Dann gilt für jedes $a \in A$:

$$a \leq b = a_0 - \varepsilon,$$

das heißt, (*) ist nicht erfüllt. ■

Satz. $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt.

Beweis. Angenommen $\mathbb{N}$ sei in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt, dann existiert $a := \sup \mathbb{N}$. Also existiert nach dem vorigen Satz ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a - 1$. Dann gilt aber $\mathbb{N} \ni n + 1 > a - 1 + 1 = a = \sup \mathbb{N}$. Widerspruch. ■

Ist $x \in \mathbb{R}$, so heißt $|x| := \max\{x, -x\}$ der *Betrag* von x. Er ist stets nichtnegativ. Für $x, y \in \mathbb{R}$ nennt man aus offensichtlichen Gründen $|x - y|$ auch den *Abstand* von x und y. Es gilt die sogenannte *Dreiecksungleichung*: $|a + b| \leq |a| + |b|$. Oft wird sie für den Abstand angewandt: $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$. Außerdem gilt auch $|a - b| \geq |a| - |b|$.

In Beweisen in der Analysis wendet man oft den folgenden Trick an, um zu zeigen, daß ein Wert $a \in \mathbb{R}$ Null ist: Man zeigt, daß er "beliebig klein" ist. Formal heißt das:

Lemma. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $a = 0$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $|a| < \varepsilon$.

Beweis. ($\Leftarrow$) Es gilt dann $0 \leq |a| \leq \inf\{\varepsilon > 0\} = 0$, also $|a| = 0$. ■

3 Zahlenfolgen

Intuitiv gesprochen, ist eine Zahlenfolge genau dies: Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von reellen Zahlen. Das heißt, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist ein reeller Wert a_n definiert. Eine Zahlenfolge ist mathematisch also nichts anderes als eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Man schreibt meist a_n statt $a(n)$ und bezeichnet die Folge als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (Diese Schreibweise wird auch verwendet, um andere *Familien*, die nicht notwendigerweise über $\mathbb{N}$ parametrisiert wird, zu beschreiben.)

Gegeben eine Folge a_n interessieren wir uns für die Frage, welches Verhalten a_n aufweist, wenn n beliebig groß wird. Zum Beispiel strebt die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ immer näher gegen 0, die Folge $(n^3)_{n \in \mathbb{N}}$ wächst ins Unendliche, und die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ pendelt zwischen zwei Werten hin und her. Im ersten Fall möchten wir gerne sagen, daß die Folge gegen 0 *konvergiert*, im zweiten, daß die Folge gegen ∞ strebt, und im dritten, daß die Folge keinen *Grenzwert* besitzt.

Wie soll man nun diese Idee des *Grenzwertes* formal definieren? Offensichtlich sollte eine Folge dann den Grenzwert a haben, wenn, für genügend großes n, der Wert a_n beliebig dicht bei a liegt. Mathematisch beschreibt man dies nun wie folgt:

Definition. Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent* gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}$ (in Zeichen $a_n \to a$ oder $\lim_{n \to \infty} a_n = a$), falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Existiert kein solches a, so heißt die Folge *divergent*.

Das sieht zwar kompliziert aus, aber die Idee ist sehr einfach: Egal, wie klein ich mir mein ε vorgebe, ab einem genügend großen Index n_0 liegt meine Folge dichter als ε bei a.

Wir haben in unserer Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n$ schon impliziert, daß eine Zahlenfolge höchstens einen Grenzwert besitzt. Laßt uns dies nun einmal formal beweisen: Seien a und b Grenzwerte von (a_n); wir behaupten, daß $a = b$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Definition des Grenzwerts ein n_1 derart, daß für $n \geq n_1$ gilt: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entsprechend existiert ein n_2 derart, daß $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_2$. Mit $n := \max\{n_1, n_2\}$ gilt dann $|a - b| < |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, also nach dem Lemma im zweiten Paragraphen $a = b$. ■

Entsprechend unserem zweiten Beispiel definieren wir noch:

Definition. Eine Zahlenfolge (a_n) heißt *bestimmt divergent gegen* $+\infty$ bzw. $-\infty$ falls

$$\forall R \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n > R, \qquad \text{bzw.}$$
$$\forall R \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n < R.$$

Den Beweis der folgenden elementaren Rechenregeln für Grenzwerte überlassen wir Euch:

Satz. Seien (a_n) und (b_n) konvergente Zahlenfolgen mit Grenzwerten a und b. Dann gilt:

1. $a_n + b_n \to a + b$.
2. $a_n b_n \to ab$.
3. Ist $b \neq 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\geq n_0}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$.

Satz. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.

Satz. ("Sandwich-Prinzip") Seien a_n, b_n, c_n Zahlenfolgen mit $a_n < b_n < c_n$; ferner seien (a_n) und (c_n) konvergent mit gemeinsamem Grenzwert a. Dann gilt $b_n \to a$.

Satz. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende (bzw. fallende) nach oben (bzw. unten) beschränkte Zahlenfolge. Dann ist (a_n) konvergent, und $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n\}$ (bzw. $\inf\{a_n\}$).

Auch wenn eine Folge nicht konvergent ist, ist es möglich, daß gewisse Teile dieser Folge konvergieren; vergleiche unser obiges Beispiel $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge ist zwar divergent, aber die *Teilfolgen* für gerades bzw. ungerades n konvergieren. Laßt uns den Begriff der *Teilfolge* formalisieren:

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge, und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge* von (a_n).

Eng damit verbunden ist der Begriff des Häufungspunktes: Eine Folge häuft sich an einem Punkt, falls sie im Laufe der Zeit stets sehr dicht an diesen herankommt.

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt* von (a_n), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Satz. Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist a genau dann Häufungspunkt von (a_n), falls a Grenzwert einer Teilfolge von (a_n) ist.

Beweis. Übung.

Satz. (Satz von Bolzano-Weierstraß) Jede (nach oben und unten) beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Betrachte die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} : \forall m > n : a_m < a_n\}$. Ist $M = \emptyset$, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m(n) > n$ mit $a_n \leq a_m$. Somit gibt es eine monoton steigende nach oben beschränkte, also konvergente Teilfolge. Ist M unbeschränkt, so können wir eine Teilfolge a_{n_k} mit

$n_k \in M$ wählen: Es sei $n_1 \in M$ beliebig und induktiv $n_{k+1} := \min\{n \in M : n > n_k\}$. Nach Definition ist (a_{n_k}) monoton fallend und beschränkt, und daher konvergent.

Ist M dagegen beschränkt, so sei n_1 eine obere Schranke für M. Wir definieren induktiv $n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n_k}\}$. (Da $n \notin M$ ist die Menge, deren Minimum gebildet wird, stets nichtleer.) Dann ist (a_{n_k}) monoton steigend und beschränkt, und daher konvergent. ■

Cauchyfolgen. Um die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, mußten wir bisher schon stets ihren Grenzwert kennen. Manchmal kann es aber hilfreich sein, ein Kriterium zur Verfügung zu haben, daß die Konvergenz nachweist, ohne den Grenzwert bereits zu kennen.

Definition. Eine Zahlenfolge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Satz. Eine Zahlenfolge ist genau dann konvergent, falls sie eine Cauchyfolge ist.

Beweis. "$\Rightarrow$": Aufgabe. "$\Leftarrow$": Wir zeigen zunächst, daß (a_n) beschränkt ist: Sei nämlich zu $\varepsilon = 1$ n_0 wie in der Definition. Dann gilt für alle $n \geq n_0$: $a_n - a_{n_0} \leq |a_n - a_{n_0}| < 1$, also $a_n < a_{n_0} + 1$.Daher ist (a_n) durch $\max\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0} + 1\}$ nach oben beschränkt. Analog ist (a_n) nach unten beschränkt durch $\min\{a_1, \ldots, a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1\}$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat (a_n) einen Häufungspunkt a. Wir zeigen, daß $a_n \to a$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n, m \geq n_0$ $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Ferner existiert, da a Häufungspunkt von (a_n) ist, ein $n_1 \geq n_0$ mit $|a_{n_1} - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Also gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Intervalle und Teilmengen von $\mathbb{R}$. Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dann heißt $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *offenes Intervall* mit Endpunkten a und b. Entsprechend heißt (falls $a \neq -\infty$, $b \neq \infty$) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *abgeschlossenes Intervall.* Auch $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ und $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ bezeichnen wir als abgeschlossene Intervalle.

Allgemeiner heißt eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ *offen*, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in U$. Umgekehrt heißt $A \subset \mathbb{R}$ *abgeschlossen*, falls $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

Aufgabe. Zeige, daß offene Intervalle offen und abgeschlossene Intervalle abgeschlossen sind.

Lemma. Sei $A \subset \mathbb{R}$. Dann ist A genau dann abgeschlossen, falls für jede konvergente Folge (a_n) von Elementen in A auch der Grenzwert in A liegt.

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei (a_n) eine konvergente Folge von Elementen in A derart, daß $a := \lim_{n\to\infty} a_n \notin A$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n > 0$ derart, daß $|a - a_n| < \varepsilon$, also $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Somit ist $\mathbb{R} \setminus A$ nicht offen, also A nicht abgeschlossen.

"$\Leftarrow$": Es sei A nicht abgeschlossen. Dann existiert ein $a \in \mathbb{R} \setminus A$ derart, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Punkt $a_n \in A \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ existiert. Offensichtlich gilt $a_n \to a$, aber $a \notin A$. ■

Definition. $A \subset \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, falls A abgeschlossen und beschränkt ist.

Aufgabe. Sei (A_n) eine Folge kompakter Intervalle mit $A_{n+1} \subset A_n$. Zeige, daß $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ entweder aus einem Punkt besteht oder ein kompaktes Intervall ist.

Aufgabe. Sei (A_n) eine Folge kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A_{n+1} \subset A_n$. Zeige, daß $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nichtleer und kompakt ist.

Definition. Eine Menge heißt *total unzusammenhängend*, falls sie keine Intervalle enthält.

Beispiel. Die Cantormenge. Es sei $A_1 := [0, 1]$, $A_2 := [0, 1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $A_3 := A_2 \setminus \big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\big)$, und fahre so fort, indem aus jedem der übrig gebliebenen Intervalle das mittlere Drittel entfernt wird. Der Schnitt $C := \bigcap A_n$ ist nichtleer und kompakt und heißt *Cantormenge.* Diese Menge ist total unzusammenhängend. Im Kurs werden wir sehen, daß diese die Cantormenge ein Fraktal ist.

Aufgabe. Formalisiere die Definition der Cantormenge und beweise formal, daß sie total unzusammenhängend ist!

4 Funktionen einer Veränderlichen

Im Folgenden sei stets I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $\bar{I}$ bezeichne das abgeschlossene Intervall mit denselben Endpunkten wie I.

Stetigkeit.

DEFINITION. Sei $x_0 \in \bar{I}$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen, daß f in x_0 den Grenzwert a hat ($\lim_{x \to x_0} f(x) = a$), falls für jede Folge (x_n) in $I \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt, daß $f(x_n) \to a$.

BEISPIEL. Für $f : [0,1) \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ gilt $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

DEFINITION. Sei $x_0 \in I$. f heißt *stetig in* x_0, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. f heißt *stetig*, oder *stetig in* I, falls f stetig in jedem Punkt von I ist.

LEMMA. f ist genau dann stetig in x_0, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in I : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

BEWEIS. Übung

BEMERKUNG. Anschaulich ist f stetig in I, falls der Graph von f keine “Sprünge” macht.

SATZ. (Zwischenwertsatz.) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, und $a, b \in I$, $a < b$. Dann nimmt f im Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

BEWEIS. Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß $f(a) < f(b)$ gilt. Sei $y_0 \in (f(a), f(b))$; wir müssen ein $x_0 \in [a, b]$ finden mit $f(x_0) = y_0$. Es sei $M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq y_0\}$. Nach Voraussetzung ist M nichtleer und nach oben beschränkt durch b; es sei $x_0 := \sup M$. Wähle eine aufsteigende Folge (x_n) in M mit $x_n \to x_0$. Aus der Stetigkeit von f folgt dann, daß $f(x_n) \to f(x_0)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(x_n) \leq y_0$; daher ist auch $f(x_0) \leq y_0$. Insbesondere gilt $x_0 \neq b$. Es bleibt zu zeigen, daß auch $f(x_0) \geq y_0$.
Annahme: Es gilt $f(x_0) < y_0$. Dann existiert zu $\varepsilon := y_0 - f(x_0)$ ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Insbesondere gilt für $x := \min\{\frac{x_0+\delta}{2}, b\}$:

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = |f(x) - f(x_0)| + f(x_0) < \varepsilon + f(x_0) = y_0,$$

also $M \ni x > x_0 = \sup M$. Widerspruch. ∎

SATZ. Sei I ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt die Funktion f auf I ihr Maximum und Minimum an (d.h. $\sup f(I), \inf f(I) \in f(I)$). Insbesondere ist $f(I)$ ein kompaktes Intervall.

BEWEIS. Aufgabe.

Gleichmäßige Konvergenz. Sei (f_n) eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$. Wir nehmen an, daß für jedes $x \in I$ der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existiert. Man kann sich fragen: Ist dann der *punktweise Grenzwert* $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ schon selbst stetig? Die Antwort ist nein; das einfachste Beispiel bildet die Folge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$, denn es gilt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}.$$

Es gibt aber eine Bedingung, die dieses Verhalten ausschließt, nämlich die sogenannte *gleichmäßige Konvergenz*. Wir sagen, daß $f_n \to f$ *gleichmäßig* konvergiert, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Man beachte, daß dies wesentlich stärker ist als die punktweise Konvergenz.

SATZ. Sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Folge von stetigen Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $x \in I$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_n stetig ist, existiert ferner ein $\delta > 0$ mit $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle x mit $|x - x_0| < \delta$. Ist also $|x - x_0| < \delta$, so gilt

$$|f(x) - f(x_0)| < |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

■

Differenzierbarkeit.

Definition. f heißt *differenzierbar* in $x_0 \in I$, falls

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ *Ableitung* von f in x_0. f heißt differenzierbar (in I), falls f in ganz I existiert.

f heißt *stetig differenzierbar*, falls f differenzierbar ist und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Die folgenden Aussagen sind einfach zu beweisen und sollten aus dem Mathematikunterricht bekannt sein.

Lemma. Ist f differenzierbar in x_0, so ist f stetig in x_0.

Lemma. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant. Dann ist f differenzierbar und $f'(z) = 0$.

Satz. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0. Dann sind auch $f + g$, fg und, falls $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0, und es gilt

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0), \\
(fg)'(x_0) &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) \text{ und} \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.
\end{aligned}$$

Satz. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^n$ ist differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.

Natürlich ist intuitiv $f'(x_0)$ die Steigung der Tangenten am Graph von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$, falls diese existiert. Manchmal ist die folgende Charakterisierung der Differenzierbarkeit hilfreich:

Lemma. f ist genau dann differenzierbar in x_0, wenn eine in x_0 stetige Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)h(x)$ für alle $x \in I$.

Satz. (Kettenregel) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to J$ und $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen. Sei $x_0 \in I$ derart, daß f in x_0 und g in $f(x_0)$ differenzierbar ist. Dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

Beweis. Es seien $h_1 : I \to \mathbb{R}$ und $h_2 : J \to \mathbb{R}$ derart, daß $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)h_1(x)$ und $g(x) = g(f(x_0)) + (x - f(x_0))h_2(x)$, wobei h_1 in x_0 und h_2 in $f(x_0)$ stetig ist. Dann ist die Funktion $h_3 : I \to \mathbb{R}$,

$$h_3(x) := h_1(x)h_2(f(x)),$$

stetig in x_0, und

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + (f(x) - f(x_0))h_2(f(x)) = g(f(x_0)) + (x - x_0)h_1(x)h_2(f(x)).$$

■

Definition. Wir sagen daß f in x ein *lokales Maximum* (bzw. ein *lokales Minimum*) hat, falls ein ε existiert derart, daß $f(x) = \max f([x - \varepsilon, x + \varepsilon])$. Lokale Maxima und Minima werden beide als *lokale Extrema* bezeichnet.

Satz. Es sei f differenzierbar in x_0. Hat f ein lokales Extremum in x_0, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Aufgabe.

Ein sehr wichtiger Satz in der Differentialrechnung ist der *Mittelwertsatz*, der besagt, daß der Graph einer differenzierbaren Funktion zwischen zwei Werten a und b mindestens einmal die Steigung der Sekante zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ annimmt.

Satz. (Mittelwersatz.) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in (a, b) und stetig in $[a, b]$. Dann existiert ein $\zeta \in (a, b)$ mit

$$f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Wir beginnen, indem wir die Sekante von f subtrahieren, und uns daher auf den Fall $f(a) = f(b) = 0$ zurückziehen: Definiere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Dann ist auch g stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b), und $g(a) = g(b) = 0$. Da $[a, b]$ kompakt ist, hat g in (a, b) mindestens ein lokales Extremum ζ. Dann gilt also $g'(\zeta) = 0$ und daher

$$0 = g'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

also $f'(\zeta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ wie gefordert. ■

Definition. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt (streng) monoton steigend falls $\forall x, y \in I$ mit $x < y$ gilt $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$. Analog (streng) monoton fallend $(f(x) \geq f(y)$ bzw. $f(x) > f(y))$.

Satz. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

- Gilt $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$, dann ist f monoton steigend.
- Gilt $\forall x \in I : f'(x) = 0$, dann ist f konstant.
- Gilt $\forall x \in I : f'(x) \leq 0$, dann ist f monoton fallend.

Beweis. Direkte Folgerung aus dem Mittelwertsatz. (Warum?)

5 Metrische Räume

Wenn man beginnt, geometrische Überlegungen auch in anderen Räumen als $\mathbb{R}$ anzustellen, möchte man Begriffe wie "Konvergenz", "Stetigkeit" etc. auch in diesem Kontext definieren. Ein guter theoretischer Rahmen dafür sind die sogenannten "metrischen Räume": Dies sind Räume, auf denen eine Metrik, also ein "Abstandsbegriff" definiert ist. Eine gute Übung ist es, während des gesamten Abschnitts zu überprüfen, daß die verallgemeinerten Definitionen auf $\mathbb{R}$ mit den alten übereinstimmen.

Vieles in diesem Abschnitt mag auf den ersten Blick etwas abstrakt erscheinen. Keine Sorge: In den allermeisten Fällen werden unsere metrischen Räume Teil von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$ (bzw $\mathbb{C}$) sein, mit der bekannten "euklidischen" Abstandsfunktion. Diese Beispiele sollte man während des gesamtes Abschnitts als Intuition herbeiziehen.

Metrik. Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to [0, \infty)$ heißt *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ ("Symmetrie"), und

- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ ("Dreiecksungleichung").

Das Paar (X,d) heißt dann *metrischer Raum.* Wenn die Metrik aus dem Kontext hervorgeht, nennt man auch X einen metrischen Raum.

Beispiel.

- $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty); d(x,y) := |x-y|$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.
- Durch

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty); d((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

  wird eine Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert; die sogenannte *euklidische Metrik.*

- Die Menge $C([0,1])$ aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ wird durch $d(f,g) := \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ zum metrischen Raum.

Bemerkung. Ist (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$, dann ist $d|_{Y\times Y}$ eine Metrik auf Y. Sie heißt die *induzierte Metrik* auf Y.

Definition. Ist X ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$, so heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X : d(x_0,x) < \varepsilon\}$$

ε-Kugel um x_0.

Offene und abgeschlossene Mengen. Im folgenden sei stets (X,d) ein metrischer Raum.

Definition. Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* eines Punktes $x \in U$, falls ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U$ existiert. U heißt *offen*, falls U Umgebung jedes Punktes $x \in U$ ist. Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist.

Lemma. Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen. Endliche Schnitte offener Mengen sind offen. Entsprechend sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

Beweis. Aufgabe.

Definition. Sei $A \subset Y \subset X$. Dann heißt A offen (bzw. abgeschlossen) *in* (oder *relativ*) Y, falls A in Y mit der induzierten Metrik offen (bzw. abgeschlossen) ist.

Bemerkung. Sei $x \in A \subset Y \subset X$. Dann ist A genau dann Umgebung von x in der relativen Metrik auf Y, wenn eine Umgebung U von x (in X) existiert mit $A = U \cap Y$.

Folgerung. $A \subset Y$ ist genau dann offen (bzw. abgeschlossen) in Y, wenn eine offene (bzw. abgeschlossene) Menge $B \subset X$ existiert mit $A = Y \cap B$.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}$ und $Y := [0,2)$. Dann ist $[0,1)$ offen in Y, und $[1,2)$ ist abgeschlossen in Y. Beide Mengen sind weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Definition. Sei $A \subset X$. Dann heißen

$$\overline{A} := \bigcap_{B\supset A \text{ abg.}} B \quad \text{und}$$

$$\mathring{A} := \bigcup_{U\subset A \text{ offen}} U$$

Abschluß bzw. *Inneres* von A. Der Abschluß ist abgeschlossen und das Innere ist offen. Die abgeschlossene Menge

$$\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$$

heißt *Rand* von A.

Konvergenz, Stetigkeit. Wie in $\mathbb{R}$ heißt eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum X *konvergent* gegen den Grenzwert $x \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Völlig analog definiert man Teilfolgen, Häufungswerte und Cauchyfolgen in X. Wie in $\mathbb{R}$ gilt: Eine Menge A ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Elementen in A selbst in A liegt. (Beweis?)

Satz. $\overline{A}$ entsteht aus A durch Hinzufügen aller Grenzwerte von in X konvergenten Folgen mit Folgengliedern in A.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *dicht*, falls $\bar{A} = X$ (oder mit anderen Worten, falls jedes $x \in X$ Grenzwert einer Folge über A ist).

Aufgabe. Zeige, daß $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dicht ist.

Definition. Ein metrischer Raum X heißt *vollständig*, falls jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Wir haben also oben gezeigt, daß $\mathbb{R}$ vollständig ist. Allgemeiner ist $\mathbb{R}^n$ (mit der euklidischen Metrik) vollständig.

Definition. Ein metrischer Raum X heißt *kompakt*, falls jede Folge in X eine (*in* X) konvergente Teilfolge hat.

Satz. Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten metrischen Raums ist kompakt.

Satz. Sei X ein metrischer Raum und (X_n) eine Folge von nichtleeren kompakten Teilmengen mit $X_n \subset X_{n+1}$ für alle n. Dann ist $\cap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ nichtleer und kompakt.

Satz. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Seien nun X und Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Wieder heißt f *stetig* in $x_0 \in X$, falls für jede Folge $x_n \to x_0$ in X auch $f(x_n) \to f(x_0)$ in Y, bzw. (gleichbedeutend) falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X : (d(x, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_n)) < \varepsilon.$$

Eine Funktion heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt von X stetig ist.

Aufgabe. Zeige, daß eine Funktion genau dann stetig ist, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

Satz. Ist X kompakt und $f : X \to Y$ stetig, so ist auch $f(X)$ kompakt.

Beweis. Aufgabe.

Zusammenhang.

Definition. Ein metrischer Raum X heißt *unzusammenhängend*, falls er separiert werden kann, d.h. es gibt zwei offene Mengen $U, V \subset X$ mit $U, V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$. Dagegen heißt X *zusammenhängend*, falls X nicht unzusammenhängend ist.

Bemerkung. X ist genau dann zusammenhängend, falls X und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Beispiel. $\mathbb{R}$ und $[0, 1)$ sind zusammenhängend; $\{1\} \cup (2, 3)$ ist unzusammenhängend.

Aufgabe. Zeige, daß die Intervalle genau die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.

Aufgabe. Zeige, daß das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Funktion zusammenhängend ist.

Satz. Sei X ein metrischer Raum und $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von nichtleeren zusammenhängenden kompakten Teilmengen von X mit $K_n \subset K_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ nichtleer, kompakt und zusammenhängend.

Beweis. K ist nichtleer und kompakt. Wir nehmen an, daß K nicht zusammenhängend ist. Dann existieren offene Mengen $A, B \subset K_1$ mit $K \cap A, K \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = K$. Sei

$n \in \mathbb{N}$. Da K_n zusammenhängend ist, gilt dann $K_n \not\subset A \cup B$, also existiert ein $x_n \in K_n \setminus (A \cup B) \subset K_1 \setminus (A \cup B)$. Da $K_1 \setminus (A \cup B)$ kompakt ist, besitzt (x_n) einen Häufungspunkt $x \notin A \cup B$. Nun liegen für jedes m nur endlich viele Werte (x_n) außerhalb von K_m. Es folgt, daß $x \in K_m$. Also gilt $x \in K \setminus A \cup B = \emptyset$. Widerspruch. ■

Homöomorphismen. Seien X und Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

Bemerkung. Eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn f streng monoton steigend oder fallend ist.

Satz. Sei X kompakt und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei $y_0 \in Y$ und $y_n \to y_0$ eine Folge in Y. Es sei $x_0 := f^{-1}(y_0)$ und $x_n := f^{-1}(y_n)$. Wir müssen zeigen, daß $x_n \to x$. Da X kompakt ist, genügt es zu zeigen, daß x_0 der einzige Häufungspunkt von (x_n) ist. (Warum?)

Ist aber $(x_{n_k}) \to x'$ eine konvergente Teilfolge, so gilt wegen der Stetigkeit von f: $f(x') = \lim y_{n_k} = y_0$. Da f injektiv ist, ist also $x' = x_0$. ■

Der Banachsche Fixpunktsatz. Der Banachsche Fixpunktsatz, auch genannt "Kontraktions-Prinzip", wird für uns bei der Betrachtung von Fraktalen wichtig sein. Im folgenden sei X ein *vollständiger* metrischer Raum.

Definition. $f : X \to X$ heißt Kontraktion, falls ein $\lambda \in [0, 1)$ existiert mit

$$d(f(x), f(y)) < \lambda d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$.

Satz. Sei $f : X \to X$ eine Kontraktion. Dann besitzt f einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x_0 (d.h. $f(x_0) = x_0$).

Beweis. Der Beweis ist eine gute Übungsaufgabe. Anleitung: Man betrachte zunächst den *Orbit* eines beliebigen Punktes x, also die Folge $x_n := f^n(x)$. Man zeige, daß x_n eine Cauchyfolge ist und daher einen Grenzwert x_0 besitzt. Dann zeige man, daß dieser Grenzwert ein Fixpunkt ist, und schließlich, daß dieser eindeutig ist. ■

6 Komplexe Zahlen

Eine der unbefriedigenden Eigenschaften der reellen Zahlen ist die Tatsache, daß etwa das Polynom $z^2 + 1$ keine Nullstellen besitzt, und sich daher nicht, wie etwa $z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$ in *Linearfaktoren* zerlegt werden kann. Die *komplexen Zahlen* entstehen, indem wir zu den reellen Zahlen eine sogenannte *imaginäre Zahl i* hinzufügen, die eben gerade die Eigenschaft besitzt, daß $i^2 = -1$ gilt. Es stellt sich heraus, daß man eine sehr natürliche Menge von Zahlen erhält, mit denen man in vieler Hinsicht angenehmer arbeiten kann als mit den reellen Zahlen. Insbesondere hat jedes nichtkonstante Polynom in den komplexen Zahlen mindestens eine Nullstelle.

Konstruktion. Wir möchten gerne einen "Zahlenkörper" $\mathbb{C}$ definieren, der die reellen Zahlen enthählt, auf dem Addition und Multiplikation den gewöhnlichen Rechenregeln entsprechen und der eine Zahl i enthält, die mit sich selbst multipliziert -1 ergibt. Nehmen wir für einen Augenblick an, wir hätten einen solchen Körper bereits definiert. Welche Folgerungen würden sich daraus ergeben?

Zunächst einmal wäre für alle $a, b \in \mathbb{R}$ auch $a + bi \in \mathbb{C}$. Weiterhin wäre diese Darstellung eindeutig: Gilt $a + bi = c + di$, so ist $0 = (a - c) + (b - d)i$. Wäre nun $b \neq d$, so wäre $i = \frac{a-c}{b-d} \in \mathbb{R}$. Also gilt $b = d$ und somit $a - c = 0$ und daher auch $a = c$.

Muß unser Körper $\mathbb{C}$ noch weitere Elemente enthalten? Das hängt davon ab, ob wir die bisher gefundenen addieren und multiplizieren können, ohne neue Elemente zu erhalten. Es gilt aber

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i \quad \text{und}$$
$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bic+bidi = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Das heißt, wir können unseren Körper $\mathbb{C}$ erhalten, indem wir auf dem $\mathbb{R}^2$ eine Addition und eine Multiplikation wie folgt definieren:

Definition. Wir führen auf der Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ die folgende Addition und Multiplikation ein:

$$(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) := (ad-bc, d+c)$$

$i := (0,1)$ heißt *imaginäre Zahl*. Es gilt $i^2 = -1$; für $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt $(a,b) = a+bi$.

Ist $z = a+bi$, so heißt a *Realteil* von z und b *Imaginärteil* von z. Wir definieren $\mathrm{Re}(z) := a$ und $\mathrm{Im}(z) := b$.

Die Darstellung von $\mathbb{C}$ als Ebene $\mathbb{R}^2$ bezeichnet man auch als *Gaußsche Zahlenebene*. Der *Betrag* einer komplexen Zahl ist definiert als

$$|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

Die Abbildung $d(z,w) := |z-w|$ ist dann eine Metrik und $\mathbb{C}$ ist mit dieser Metrik ein vollständiger metrischer Raum.

Die Addition in $\mathbb{C}$ ist nichts anderes als die aus der linearen Algebra bekannte Addition zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$: Stellt man sich z als "Pfeil" vor, die vom Nullpunkt zum Punkt z zeigt, so erhalten wir den Vektor $z+w$, indem die beiden Vektoren z und w aneinandergehängt werden; der Endpunkt dieses Pfeiles ist dann die Summe.

Wie aber stellt sich die komplexe Multiplikation in der Zahlenebene dar?

Polarkoordinaten. Sei $z \neq 0$. Dann ist $w := \frac{z}{|z|}$ eine komplexe Zahl mit $|w| = 1$, liegt also auf dem Einheitskreis. Ist ϕ der Winkel zwischen w und der reellen Achse, so ist bekanntlich $\mathrm{Re}(w) = \cos(\phi)$ und $\mathrm{Im}(w) = \sin(\phi)$. Damit haben wir bewiesen:

Bemerkung. Sei $z \neq 0$. Dann hat z eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$$

mit $r = |z| > 0$ und $\phi \in [0, 2\pi)$. Diese Darstellung bezeichnet man als *Polarkoordinaten*.

Seien nun $\phi, \psi \in [0, 2\pi)$. Dann gilt

$$(\cos(\phi)+i\sin(\phi))(\cos(\psi)+i\sin(\psi)) =$$
$$\cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi) + i(\sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\sin(\psi)) = \cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi).$$

Hieraus gewinnen wir nun eine geometrische Interpretation der Multiplikation: Ist $a = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi) \in \mathbb{C}$, so wird ein beliebiger Vektor $z \in \mathbb{C}$ durch Multiplikation mit a um den Winkel ϕ gedreht und um den Faktor r gestreckt.

Holomorphe Funktionen.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f *holomorph*, falls für jedes $z_0 \in U$ die *Ableitung*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Ist f holomorph und $f'(z_0) \neq 0$, so nennt man f auch *konform* in z_0.

Die *Funktionentheorie*, die sich mit holomorphen Funktionen beschäftigt, ist ein sehr schönes und reiches Gebiet der Mathematik. Es gibt hier viele Phänomene, die sich in der reellen Analysis nicht wiederfinden. So ist zum Beispiel für eine holomorphe Funktion auch die Ableitung schon holomorph.

Je nach der Gewichtung der holomorphen Dynamik im Kurs werden wir Euch hierzu Unterlagen zu einem späteren Zeitpunkt zusenden.