VORKURS MATHEMATIK

Hermann König, Oktober 2008

Im 1. Semester des Mathematikstudiums werden die aus der Schule bekannten Begriffe und Ergebnisse der Analysis und der Linearen Algebra neu behandelt, und die Resultate werden sauber aus Grundannahmen, den Axiomen, abgeleitet. Diese logische Strenge macht erfahrungsgemäß vielen Studienanfängern Schwierigkeiten, da - anders als in der Schule - die Rechenfertigkeiten weniger im Vordergrund stehen als die saubere Grundlegung der Begriffe (wie etwa Stetigkeit oder Differenzierbarkeit) und die logisch klaren Beweise der Sätze (wie etwa des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechung). Die Rechentechniken fallen dabei nebenbei ab: an dieser Stelle wird auf diese aus der Schule bekannten Fähigkeiten implizit zurückgegriffen, da sie nur kurz (erneut) eingeübt werden. Der Vorkurs soll zur Erleichterung des Übergangs Schule-Universität daher dazu dienen

- Rechentechniken (Brüche, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, trigonometrische Funktionen) zu wiederholen

- den sicheren Umgang mit Gleichungen und Ungleichungen einzuüben

- wichtige Beweisprinzipien der Mathematik zu behandeln (direkter und indirekter Beweis, Beweis durch vollständige Induktion).

Dies ist also kein axiomatischer Aufbau von Themenbereichen der Analysis oder linearen Algebra (der erst in den Vorlesungen erfolgt). Insbesondere gehen wir von einem naiven Verständnis der reellen Zahlen aus. Wir werden allerdings typische Techniken mathematischer Schlussfolgerungen und Beweisprinzipien erörtern.

Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ besteht genau eine der Beziehungen $a < b, a = b, a > b$.

Anordnungsregeln:
für $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} (a \le b \text{ und } b < c) \Rightarrow\ a < c \\ a < b \Rightarrow\quad a + c < b + c \\ (a < b \text{ und } c > 0) \Rightarrow\ a\,c < b\,c \\ (a < b \text{ und } c < 0) \Rightarrow\ a\,c > b\,c \end{cases}$$

Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt es genau eine Zahl $x = b - a \in \mathbb{Z}$ mit $a + x = b$; x ist in $\mathbb{N}$, wenn $b > a$ ist.
$\mathbb{Q} = \{[\frac{p}{q}] \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ Menge der rationalen Zahlen:
Ein Bruch $\frac{p}{q}$ repräsentiert die gleiche Zahl wie der Bruch $\frac{r}{s}$, wenn $ps = rq$ gilt: rationale Zahlen sind *Äquivalenzklassen* solcher Brüche $[\frac{p}{q}] = [\frac{r}{s}]$. Durch *Kürzen* findet man eine Darstellung $x = \frac{p}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}$ und (p, q) teilerfremd. Für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $b \neq 0$ gibt es genau eine Zahl $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ mit $a\,x = b$.
Nicht alle Längen auf der *Zahlengeraden* können durch rationale Zahlen dargestellt werden: so ist $x = \sqrt{2}$ (Lösung von $x^2 = 2,\ x > 0$) **nicht** rational, wird aber beliebig genau durch rationale Zahlen approximiert:

$$\begin{array}{rclcrcl} 1.4^2 & = & 1.96 & <2< & 1.5^2 & = & 2.25 \\ 1.41^2 & = & 1.9881 & <2< & 1.42^2 & = & 2.0164 \end{array}$$

Somit

$$\begin{array}{rcl} 1.4 & <\sqrt{2}< & 1.5, \\ 1.41 & <\sqrt{2}< & 1.42, \ldots \\ 1.41421 & <\sqrt{2}< & 1.41422 \text{ usw.} \end{array}$$

$\sqrt{2}$ ist *irrational*, die rationalen und irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die durch unendliche Dezimalbrüche dargestellt werden. Die obigen Ordnungen $<, =, >$ lassen sich für alle reellen Zahlen einführen, mit den gleichen Rechenregeln.
Der **(Absolut-) Betrag** $|a|$ einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ wird durch

$$|a| = \left\{ \begin{array}{rl} a & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{array} \right\} \text{eingeführt.}$$

Dreiecksgleichung: $|a + b| \leq |a| + |b| \quad ; a, b \in \mathbb{R}$

Zur Bruchrechnung: $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{Q},\ c \neq 0$ (oder in $\mathbb{R}$)

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad ; \quad b, d \neq 0 : \text{Hauptnennerbildung}$$

Es gilt **nicht:** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Beispiele. (1) S$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15}$: Hauptnenner ist kgV (2, 3, 5, 6, 15) = 30,

also S$= \frac{15}{30} - \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{5}{30} + \frac{2}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

(2) $$\frac{\frac{a}{1-a} + \frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a} - \frac{a}{a+1}} = \frac{\frac{a \cdot a + (a+1) \cdot (1-a)}{(1-a)a}}{\frac{(a-1) \cdot (a+1) - a \cdot a}{a \cdot (1+a)}} = \frac{\frac{1}{a(1-a)}}{\frac{-1}{a(1+a)}} = -\frac{1+a}{1-a} = \frac{a+1}{a-1}.$$

Potenzen und Wurzeln

Die *n-te Potenz* a^n einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist das n-fache Produkt von a mit sich selbst, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Man setzt auch $a^0 = 1$. Wenn $b = a^n$ ist, ist b *der Potenzwert*, a die Basis und n der *Exponent*. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$ gelten die Rechenregeln

$$\begin{array}{rcll} a^n \cdot b^n &=& (a \cdot b)^n &, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ a^n / b^n &=& (a/b)^n &, \quad a^n / a^m = a^{n-m} \quad (b, a \neq 0) \\ (a^n)^m &=& a^{n \cdot m} &, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0) \end{array}$$

Die *n-te Wurzel* $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ aus einer *positiven* reellen Zahl $a > 0$ ist diejenige positive Zahl b, für die $b^n = a$ gilt (mit $n \in \mathbb{N}$).

Bemerkung: Für gerade $n = 2, 4, 6, \ldots$ existiert für $a < 0$ keine Wurzel $b = \sqrt[n]{a}$ im Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (etwa $\sqrt{-1}$). Für $a > 0$ hat dann aber $b^n = a$ *zwei* reelle Lösungen b ($b > 0$ und $b < 0$). Für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$. Es gilt i. a. nicht $\sqrt{a^2} = a$: nur korrekt für $a > 0$. Man hat $\sqrt{a^2} = |a|$.
Rechenregeln für die Wurzelbildung: Für $a, b > 0$ und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{array}{rclcrcl} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &=& \sqrt[n]{a \cdot b} &,& \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} &=& \sqrt[nm]{a^{n+m}} \\ \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} &=& \sqrt[n]{a/b} &,& \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &=& \sqrt[nm]{a} \end{array}$$

Gleiche Gesetze wie bei den Potenzen, wenn man $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ beachtet.

Beispiele:

(1) $\frac{9^4 (a^2 \sqrt{a}\, b)^2}{18^2 (3ab)^3} = \frac{3^8 \cdot a^4 \cdot a \cdot b^2}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3 \cdot a^3 \cdot b^3} = \frac{3 \cdot a^2}{4 \cdot b}; a > \ 0, b \neq 0$

(2) $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = 125^{1/6} = (5^3)^{1/6} = 5^{1/2} = \sqrt{5} \simeq 2.2361$

(3) Für $|a| > |b|$, also $a^2 > b^2$ gilt

$$\sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \cdot (a + \sqrt{a^2 - b^2})}$$

$$= \sqrt{a^2 - \sqrt{a^2 - b^2}^{\,2}} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)} = \sqrt{b^2} = |b|.$$

(4) $\frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

(5) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Für $a > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ lässt sich die *allgemeine Potenz* a^α einführen, die für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ mit der n-ten Potenz und $\alpha = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ mit der n-ten Wurzel übereinstimmt. Man macht dies zunächst für rationale Zahlen $\alpha = m/n$, indem man setzt

$$a^\alpha = \sqrt[n]{a^m}$$

und für beliebige reelle Zahlen α dann durch geeignete Approximation, etwa
$2.657 \simeq 2^{141/100} = 2^{1.41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1.42} = 2^{142/100} \simeq = 2.676 \quad (2^{\sqrt{2}} \simeq 2.665)$

Es gelten dann die **Potenzrechenregeln**

$a^0 = 1$, $a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$, $\sqrt[n]{a} \;=\; a^{1/n}$, $\sqrt[n]{a^m} \;=\; a^{m/n}$
$a^\alpha \cdot b^\alpha = (a \cdot b)^\alpha$, $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
$a^\alpha / b^\alpha = (a/b)^\alpha$, $a^\alpha / a^\beta = a^{\alpha-\beta}$.

Beispiel: $\sqrt{a^2+a}\ \sqrt{ab+b} \;=\; [a(a+1)]^{1/2} \;\cdot\; [b(a+1)]^{1/2}$
$= (ab)^{1/2} \;\cdot\; (a+1)^1 \;=\; (a+1)\sqrt{ab}.$

Logarithmen
Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen, $b \neq 1$, und $x \in \mathbb{R}$ so, dass $a = b^x$. Dann heisst $x = \log_b\ a$ der **Logarithmus** von a zur Basis b . Dieser Logarithmus ist für $a, b > 0, b \neq 1$ eindeutig bestimmt.
Typische Basen: $b = 10,\ 2$ ($10^{er}-$ System, Dualsystem) oder $b = e \simeq\ 2.71828$ (Eulersche Zahl): Für $b = e$ Schreibweise $\ln := \log_e$ (natürlicher Logarithmus).

Beispiel:

$$\begin{array}{lcrll} \log_2\ 16 & = & 4, & \text{da} & 2^4 = 16 \\ \log_3(\frac{1}{9}) & = & -2, & \text{da} & 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \\ \log_5(125) & = & 3, & \text{da} & 5^3 = 125 \end{array}$$

Es gilt
$a = b^{\log_b a} \;= log_b\ (b^a),\quad \log_b\ 1 = 0\ ,\ \log_b\ b = 1$

Logarithmengesetze
Für $b > 0,\ b \neq 1$ und $x, y > 0,\ a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\log_b(xy) = \log_b x\ + \log_b\ y \tag{1}$$

$$\log_b(x/y) = \log_b x\ - \log_b\ y$$

$$\log_b(x^a) = a\ \log_b\ x \tag{2}$$

$$\log_b\ \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b\ x \tag{3}$$

Herleitung von (1): Setze $c := \log_b(xy), c_1 := \log_b\ x, c_2 := \log_b\ y$.
Dann gilt $b^c = xy,\ b^{c_1} = x,\ b^{c_2} =\ y,$ also $b^c = xy = b^{c_1}\ b^{c_2} = b^{c_1+c_2}$, woraus $c = c_1 + c_2$ folgt.
Zu (3): Sei $c := \log_b\ \sqrt[n]{x}\ , c_1 := \log_b\ x$. Also $b^c = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}, b^{c_1} = x = (x^{1/n})^n = b^{cn}$, woraus sich $c = \frac{1}{n}\,c_1$ ergibt.
Zu (2): Für rationales $a = m/n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ ist nach (1), (3)

$$\log_b(x^a) = \log_b\ (x^{1/n})^m = m\ \log_b\ x^{1/n} = \frac{m}{n} \log_b\ x = a\ \log_b\ x.$$

Gesetz (1) wurde früher (mit Hilfe von Logarithmentafeln oder mittels Rechenschieber) zum Multiplizieren von Zahlen x, y benutzt (vor Einführung der Taschenrechner) und

wird auch heute intern in Computern verwandt.
Übergang von einer Basis b zu einer Basis d :

$$\log_d a = (\log_b a)(\log_d b) \tag{4}$$

Beweis von (4): Sei $c_1 := \log_b a,\ c_2 := \log_d b,$ also $b^{c_1} = a\,, d^{c_2} = b.$
Es ergibt sich $d^{c_1 c_2} = (d^{c_2})^{c_1} = b^{c_1} = a$, also $c_1 c_2 = \log_d a.$
Speziell gilt:

$$\begin{array}{lcll} \log_{10} a & = & (\log_2 a)(\log_{10} 2) & , \ \log_{10} 2 \ \simeq \ 0,30103 \\ \log_2 a & = & (\log_{10} a)(\log_2 10) & , \ \log_2 10 \ = \ \frac{1}{\log_{10} 2} \simeq 3,3219 \\ \ln a & = & (\log_{10} a)(\ln 10) & , \ \ln 10 \ \simeq \ 2.3026 \\ \log_{10} a & = & (\ln a)(\log_{10} e) & , \ \log_e 10 \ = \ \frac{1}{ln\, 10} \simeq 0.4343. \end{array}$$

Beispiele

(1) $\log_{10} x = -2 \ : \ x = 10^{-2} = 1/100$

(2) $5^x = 0,04 = \frac{1}{25} \ : \ x = \log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2$

(3) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}} = \frac{1}{2} \ln(e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}) = \frac{1}{2} \ln\left(e^{3\ln(e^2 \cdot e^6)}\right)$

$= \frac{1}{2} \ln \left(e^{\ln(e^8)}\right)^3 = \frac{3}{2} \ln e^{\ln e^8} = \frac{3}{2} \ln e^8 = 8\,\frac{3}{2} = 12$

(4) $x = \log_{10} 5 \cdot \log_{10} 20 + (\log_{10} 2)^2$

$= \log_{10} 100 + (\log_{10} 2)^2 = 2 + (\log_{10} 2)^2 \simeq 2 + 0,3010^2 \simeq 2.0906.$

(5) $x = (\sqrt{e})^{3 \ln 5} = (e^{\frac{1}{2}})^{3 \ln 5} = \left(e^{ln\, 5}\right)^{3/2} = 5^{3/2} = \sqrt{125}$

(6) $x = \sqrt{10^{2+\log_{10} 9}} = \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{10^{\log_{10} 9}} = 10\,\sqrt{9} = 30$

Trigonometrische Funktionen
Eine Ebene kann mit dem $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dem kartesischem Produkt von $\mathbb{R}$ mit sich selbst, identifiziert werden. Ein Kreis vom Radius $r > 0$ mit Mittelpunkt $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ wird durch

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

gegeben (Pythagoras). Die (mathematisch) positive Umlaufrichtung um den Kreis ist die Bewegung im Gegenuhrzeigersinn.
Der Winkel zwischen der positiven x-Achse und einem in $0 \in \mathbb{R}^2$ beginnenden zweiten Halbstrahl (positiv oder negativ je nach Umlaufsinn) kann in

- Grad gemessen werden: eine Umdrehung 360°, ein rechter Winkel 90°

- Bogenmaß gemessen werden: Länge des Winkelbogens eines Kreises vom Radius $r = 1$, eine Umdrehung 2π , ein rechter Winkel $\pi/2$ ($\pi = 3.14159$)

$\alpha^{^\circ}$ entspricht im Bogenmaß $\beta = \frac{2\pi}{360^\circ}\, \alpha^{^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^{^\circ}$; $\alpha^{^\circ} = \frac{180^{^\circ}}{\pi}\, \beta.$

Bogenmaß $\beta = 1$ entspricht in Grad $\alpha^{^\circ} \simeq 57,296^{^\circ}$.

Winkelfunktion im rechtwinkligen Dreieck O P Q im Einheitskreis (Fig. 1)

Sinus $\sin\ \beta := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$

Kosinus $\cos\ \beta := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$

Tangens $\tan\ \beta := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

Kotangens $\cot\ \beta := 1/\tan\ \beta.$

Man hat dann $\tan\beta\ =\ \sin\beta/\cos\ \beta$,

$$\sin\ \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\ \beta\,, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\ \beta,$$
$$(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 = 1, \quad 1 + (\tan\beta)^2\ = 1/\,(\cos\beta)^2\,.$$

Spezielle Werte der triginometrischen Funktionen

β	$\cos\beta$	$\sin\beta$	$\tan\beta$
$0 = 0°$	1	0	0
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3} = 60°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2} = 90°$	0	1	$\pm\infty$

Sinussatz
In einem allgemeinem Dreieck $\triangle(ABC)$ mit den Seiten a, b, c, den Winkeln α, β, γ gilt der Sinussatz

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}\ :$$

Mit den Bezeichnungen aus Fig. 2, speziell der Höhe h_c auf die Seite c , gilt

$$\sin\ \alpha = \frac{h_c}{b}\ , \quad \sin\ \beta = \frac{h_c}{a}\ ,$$

also

$$h_c = b \ \sin \ \alpha = a \ \sin \ \beta, \qquad \frac{\sin \ \alpha}{a} = \frac{\sin \ \beta}{b}.$$

Kosinussatz
Es gilt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \ \cos \ \alpha :$

Aus dem Satz des Pythagoras folgt $h_c^2 = b^2 - q^2 = a^2 - p^2$. Mit $p = c - q$ und $\cos \ \alpha = q \, / \, b$ erhalten wir
$a^2 = b^2 + p^2 - q^2 = b^2 + (c-q)^2 - q^2 = b^2 + c^2 - 2cq$
$\quad = b^2 + c^2 - 2bc \ \cos \ \alpha.$

Da $\cos \ \alpha$ für α zwischen 0 und π nur für $\alpha = \pi/2$ Null wird, folgt aus $a^2 = b^2 + c^2$, dass $\alpha = \pi/2 \simeq 90^\circ$ ist: Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin \ x \ \cos \ y \ \pm \ \cos \ x \ \sin \ y \tag{1}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos \ x \ \cos \ y \ \mp \ \sin \ x \ \sin \ y \tag{2}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin \ x \ \cos \ x \ , \ \cos(2x) = (\cos \ x)^2 - (\sin \ x)^2 \tag{3}$$

$$\tan(x \pm y) = \tfrac{\tan \ x \pm \tan \ y}{1 \mp (\tan \ x)(\tan \ y)}. \tag{4}$$

Wir leiten (2) aus Fig. 2 ab, wenn $x, y \in (0, \pi/2)$ ist: setze dort $\gamma_1 := x, \gamma_2 := y$, $\gamma = x + y$. Nach dem Kosinussatz gilt

$$2ab \ \cos \ \gamma = a^2 + b^2 - c^2$$

Mit Pythagoras: $a^2 = p^2 + h_c^2$, $b^2 = q^2 + h_c^2$, $c^2 = (p+q)^2$.
Also

$$\begin{aligned} 2ab \ \cos \ \gamma &= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - p^2 - q^2 - 2pq = 2(h_c^2 - pq), \\ \cos \ \gamma &= \tfrac{h_c}{a} \, \tfrac{h_c}{b} - \tfrac{p}{a} \, \tfrac{q}{b} = \cos \ \gamma_1 \ \cos \ \gamma_2 - \sin \ \gamma_1 \ \sin \gamma_2. \end{aligned}$$

Der Beweis von (1) ist ähnlich. Für $x = y$ ergibt sich (3).

Beweis von (4):

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin \ x \ \cos \ y \ + \ \cos \ x \ \sin \ y}{\cos \ x \ \cos \ y - \sin \ x \ \sin \ y}$$

Teilt man Nenner und Zähler durch $(\cos x)(\cos y)$, so erhält man

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \ \tan y}.$$

Mit $\sin 0 = \sin(\pi) = \sin(2\pi) = 0$, $\cos 0 = \cos(2\pi) = 1$, $\cos(\pi) = -1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\cos(x+2\pi) &= \cos x \ \cos(2\pi) - \sin x \ \sin(2\pi) = \cos x \\
\sin(x+2\pi) &= \sin x \ \cos(2\pi) + \cos x \ \sin(2\pi) = \sin x :
\end{aligned}$$

die trigonometrischen Funktionen sind (2π)- periodisch. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\cos(\pi \pm x) &= \cos\pi \ \cos x \ \mp \ \sin\pi \ \sin x = -\cos x \\
\sin(\pi \pm x) &= \sin\pi \ \cos x \ \pm \ \cos\pi \ \sin x = \mp \sin x
\end{aligned}$$

Die Graphen von $\sin, \cos, \tan, \cot$ sind in Fig. 3 und 4 veranschaulicht.

Doppelte-Winkel-Formeln

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

implizieren für $x = \frac{\alpha}{2}$, dass

$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-(\cos\alpha)^2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Beispiel: $\cos(15°) = \sqrt{\frac{1+\cos(30°)}{2}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}/2$, $\sin(15°) = \sqrt{2-\sqrt{3}}/2$.

Beispiele zu den Additionstheoremen:

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos x + \cos(2x) \ \sin x \\
&= 2 \sin x \ (\cos x)^2 + (1 - 2(\sin x)^2) \ \sin x \\
&= 2 \sin x \ - 2(\sin x)^3 + \sin x \ - 2(\sin x)^3 = 3 \sin x - 4(\sin x)^3 \\
\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x) \ \cos x - \sin(2x) \ \sin x \\
&= (2(\cos x)^2 - 1) \ \cos x \ - \ 2(\sin x)^2 \ \cos x \\
&= 2(\cos x)^3 - \cos x \ - \ 2\cos x \ + \ 2(\cos x)^3 = 4(\cos x)^3 - 3\cos x
\end{aligned}$$

Gleichungen

Lineare Gleichungen in einer Unbekannten / Variablen x haben die Form $ax + b = c$; aufgelöst $x = \frac{c-b}{a}$, wenn $a \neq 0$ ist.

Beispiele: a) $6x+3-2x+1=8$, vereinfacht $4x+4=8$, $4x=4$, $x=1$.
b) $\frac{2x-a}{x-b}=1$ nur sinnvoll, wenn die Lösung $x \neq b$ ist. Für $x \neq b$ gilt die Gleichung, genau wenn $2x-a=x-b$, $x=a-b$: $x \neq b$, wenn $a \neq 2b$ ist.

Quadratische Gleichungen in einer Unbekannten x haben die Form
$ax^2+bx+c=0$, $x^2+px+q=0$ mit $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.
Quadratische Ergänzung: $(x+\frac{p}{2})^2+q-(\frac{p}{2})^2=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$
Lösungen also $x=-\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}$: genau zwei Lösungen, wenn $p^2 \neq 4q$, für $p^2=4q$ eine doppelte Nullstelle $x=-\frac{p}{2}$.

Ungleichungen
Multipliziert man die Ausdrücke in einer Ungleichung $a<b$ mit einer

{ positiven / negativen } Zahl c, { bleibt sie erhalten / kehrt sie sich um} :
$(c>0 \Rightarrow ac<bc)$ / $(c<0 \Rightarrow ac>bc)$

Beispiele (1) $5<6 \Rightarrow \quad 2\cdot 5=10< \ 2\cdot 6=12$
$(-2)\cdot 5=-10> \ (-2)\cdot 6=-12$

(2) Finde die reellen $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichung gilt:

$$x^2+4x-5<0$$

Mit $x^2+4x-5=(x+2)^2-9$ gilt das, genau dann, wenn $(x+2)^2<9=3^2$ ist. Das bedeutet $|x+2|<3$, also $x+2<3$ **und** $-(x+2)<3$. Ersteres bedeutet $x<1$, zweites $-5<x$. Lösungsintervall also $(-5,1)$.

(3) Finde die reellen $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2-x-1>0$.
Es ist $x^2-x-1=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}>0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2>\frac{5}{4}$, also für $|x-\frac{1}{2}|>\frac{\sqrt{5}}{2}$:
$x-\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$ *oder* $-(x-\frac{1}{2})>\frac{\sqrt{5}}{2}$. Dies gilt für $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **oder** $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Lösungsmenge $x \in (-\infty,-\frac{\sqrt{5}-1}{2}) \cup (\frac{\sqrt{5}+1}{2},\infty)$.

(4) Lösungsmenge $x \in M$ von (*) $\frac{3x-1}{2x+4}<2$ gesucht, $x \neq -2$.

a) Falls $2x+4>0$ ist, also $x>-2$, darf man die Ungleichung mit $2x+4$ multiplizieren:
$\frac{3x-1}{2x+4}<2 \Leftrightarrow 3x-1<2(2x+4)=4x+8 \Leftrightarrow -9<x$
Da $x>-2 \Rightarrow x>-9$, gilt (*) also für alle $x>-2$.

b) Falls $2x+4<0$ ist, also $x<-2$, ergibt die Multiplikation mit $2x+4$
$\frac{3x-1}{2x+4}<2 \Leftrightarrow 3x-1>2(2x+4)=4x+8 \Leftrightarrow x<-9$.

(*) gilt also auch für alle $x < -9$.
Lösungsmenge daher $M = (-\infty, -9) \cup (-2, \infty)$.

(5) Lösungsmenge M von $(3x-5)(x-2) \leq 4(x-2)$ gesucht. Division durch $(x-2)$ ergibt:

a) für $x > 2$: $3x - 5 \leq 4$, $3x \leq 9$, $x \leq 3$: Intervall [2,3].

b) für $x < 2$: $3x - 5 \geq 4$, $3x \geq 9$, $x \geq 3$: keine Lösung. M=[2,3].

(6) Finde die reellen $x \in \mathbb{R}$ mit $|x^2 - 6x + 5| < 3$. (+)

a) Es ist $x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 5$ oder $x \leq 1$
$\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty) =: M_1$.

Für $x \in M_1$ gilt (+), wenn $x^2 - 6x + 5 < 3$ ist, d.h. $x^2 - 6x + 2 < 0$ ist.
Lösungen von $x^2 - 6x + 2 = 0$ sind $x_\pm = 3 \pm \sqrt{7}$. Es ist $x^2 - 6x + 2 < 0$ genau dann, wenn $x \in (x_-, x_+) = (3 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}) \simeq (0,354, 5,646)$
Lösungen von (+) also für $x \in (3 - \sqrt{7}, 1] \cup [5, 3 + \sqrt{7})$.

b) $x^2 - 6x + 5 < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (1,5) =: M_2$.
Für $x \in M_2$ gilt (+), wenn $-(x^2 - 6x + 5) < 3$ ist, also $x^2 - 6x + 8 > 0$ gilt.
Lösungen von $x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2) = 0$ sind $x = 2, 4$. Also (+) erfüllt für $x \in (1,2) \cup (4,5)$.
Zusammengenommen gilt (+) für $x \in M := (3 - \sqrt{7}, 2) \cup (4, 3 + \sqrt{7})$.
Skizziere den Graphen von $y = |x^2 - 6x + 5|$.

Aussagenlogik

Mathematische Aussagen sind **wahr** (w) oder **falsch** (f), eine dritte Möglichkeit wird ausgeschlossen. **Aussageform** = Aussagesatz mit einer freien Variablen, weder w noch f. Es wird eine Aussage daraus, wenn man für die Variable konstante Werte einsetzt.

Aussagen	7 ist eine Primzahl	w	
	7 ist eine gerade Zahl	f	
	$7 < 3$	f	
Aussageform	$x^2 + 2x + 1 = 0$:	für $x = -1$	w
		für $x = +1$	f

Zunächst ist offen, ob es überhaupt Werte gibt, für die die Aussagenform w wird.
Dazu die Existenzaussage: " $\exists x \in \mathbb{R}$ " = "es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit ...":
Sei $A(x)$ eine Aussageform mit einer freien Variablen x : " $\exists x \in X \; A(x)$ ".

$\exists x \in \mathbb{R}$	$x + 1 = 0$	w	(wähle $x = -1$)
$\exists x \in \mathbb{R}$	$x^2 + 4x + 4 = 0$	w	(wähle $x = -2$)
$\exists x \in \mathbb{R}$	$x^2 + 1 = 0$	f	($x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 > 0$)

Universalaussage: " $\forall x \in \mathbb{R}\ A(x)$ " = "für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $A(x)$".

$$\begin{array}{lll} \forall x \in [1,\infty) & x^2 > x & \text{w} \\ \forall x \in \mathbb{R} & x^2 > x & \text{f} \quad (0^2 = 0 \not> 0) \end{array}$$

Negation von Aussagen A: $\neg\, A$ mit umgekehrtem Wahrheitswert:

A	¬ A
w	f
f	w

Negation von Existenz- und Universalaussagen:
$\neg\ (\forall_{x\in\mathbb{R}}\quad A(x))$ gleichbedeutend mit $(\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \neg\, A(x))$
$\neg\ (\exists_{x\in\mathbb{R}}\quad A(x))$ gleichbedeutend mit $(\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \neg\, A(x))$

Konjunktion zweier Aussagen A, B :"$A \wedge B$"= "A und B"
$A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Disjunktion zweier Aussagen A, B : "$A \vee B$" = "A oder B"

$A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine Aussage wahr ist.

A	B	A ∧ B	A ∨ B
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Beispiele:	A:	$3 < 7$	w
	B:	3 ist gerade	f
	C:	3 teilt 6	w

Dann ist A ∧ B : f , A ∨ B : w , A ∧ C : w , A ∨ C : w.

$$\begin{array}{lll} \text{D} & : & a < c \\ \text{E} & : & b < c \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{F} & : & a > c \\ \text{G} & : & b > c \end{array}$$

Dann bedeutet

$$\begin{array}{lll} \text{D} \wedge \text{E} & : & \max\{a, b\} < c \\ \text{F} \vee \text{G} & : & \max\{a, b\} > c. \end{array}$$

Implikation: Seien A, B Aussagen. "Aus A folgt B", "A ⇒ B",
bedeutet: wenn A gilt (w ist), gilt auch B (ist w).
A ist die *Voraussetzung / Prämisse*, B die *Behauptung / Konklusion*.
Die Implikation A ⇒ B ist genau dann falsch (f), wenn A wahr und B falsch ist (aus A

kann B nicht gefolgert werden).

A	B	A $\Rightarrow$ B	($\neg$ A)$\vee$B	$\neg$ B	$\neg$ A	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
w	w	w	w	f	f	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w

"$A \Rightarrow B$" ist also gleichbedeutend mit "$(\neg A) \vee B$". Die Implikation ist die Grundlage mathematischen Schließens. Wenn allerdings A falsch ist, kann B w oder f sein, auch bei wahrer Implikation: Aus einer falschen Aussage kann man beliebig unsinnige (f) Aussagen folgern:

Beispiel A : $4|8$ w , B: $2|8$ w
C : $4|6$ f , D: $4|5$ f

Implikation A $\Rightarrow$ B ist wahr (w)
Implikation A $\Rightarrow$ C ist falsch (f) (A : w, aber B : f)
Implikation C $\Rightarrow$ D ist wahr (w) (C, D **beide f**)
Implikation C $\Rightarrow$ B ist wahr (w) (C : f, B : w)

Zur letzten Implikation: Aus einer falschen Aussage kann durch korrektes Schließen sowohl eine **wahre** wie auch eine **falsche** Aussage gefolgert werden (Implikation als solche ist wahr): Aus -1 = 1 (f) folgte durch Quadrieren 1 = 1 (w), durch kubische Potenzbildung $(-1)^3 = 1^3$, d.h. -1 = 1 (f).

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ bedeutet "A $\Rightarrow$ B **und** B $\Rightarrow$ A"
A gilt genau dann, wenn B gilt.
Wenn die Implikationen A $\Rightarrow$ B wahr ist, d.h. aus Aussage A Aussage B gefolgert werden kann, sagt man
"A ist eine **hinreichende** Bedingung für B"
"B ist eine **notwendige** Bedingung für A".

Beispiel: A : 6 teilt n
B : 3 teilt n
A $\Rightarrow$ B ist wahr (3 teilt 6, 6 teilt n, also 3 teilt n)

Hinreichend dafür, dass 3 n teilt, ist, dass 6 die Zahl n teilt.
Notwendig dafür, dass 6 n teilt, ist, dass 3 die Zahl n teilt.

Beweismethoden
1. **Direkter Beweis**
Er besteht aus einer Folge von Implikationen, beginnend mit einer wahren Aussage, so dass die letztendliche Schlussfolgerung auch wahr ist.

Beispiel: **Voraussetzung** : $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0, b \geq 0$
Behauptung : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Beweis. Die Aussage $(a-b)^2 \geq 0$ ist wahr. Also

$$\begin{array}{lll} a^2+b^2-2ab \geq 0 & \Rightarrow & a^2+b^2+2ab \geq 4ab, \text{ d.h.} \\ (a+b)^2 \geq 4ab & \Rightarrow & (a+b) \geq 2\sqrt{ab} \quad \text{durch Wurzelziehen.} \end{array}$$

Daher folgt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. □

Problem: Aussage A finden, von der ausgegangen wird: $(a-b)^2 \geq 0$.
Oft versuchsweise Umformulierung der Behauptung, bis man auf eine solche wahre Aussage (wie A) kommt: das ist aber die falsche Schlussrichtung: man muss dann die Schlüsse umkehren können.

2. **Indirekter Beweis**
"A $\Rightarrow$ B" ist logisch äquivalent zu "$\neg B \Rightarrow \neg A$": wenn B nicht gilt, gilt auch A nicht (denn aus A soll ja B folgen). Dies ist das Prinzip des indirekten Beweises: man nimmt an, die Behauptung B gelte nicht und führt dies zu einem Widerspruch zur Annahme, dass A gilt.

Beispiel 1. **Voraussetzung:** $a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \geq 0$
Behauptung: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Beweis. Die Negation der Behauptung ist, dass Zahlen $a \geq 0, b \geq 0$ existieren mit $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$. Quadrieren: $\frac{(a+b)^2}{4} < ab, a^2+2ab+b^2 < 4ab, a^2-2ab+b^2 < 0$, $(a-b)^2 < 0$
Widerspruch, da Quadrate reeller Zahlen ≥ 0 sind. □

Beispiel 2. **Behauptung**: $\sqrt{2}$ ist irrational ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
Beweis. Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ gelte. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Durch Kürzen können wir annehmen, dass p und q teilerfremd sind. Quadrieren ergibt $2q^2 = p^2$. Wäre p ungerade, wäre auch p^2 ungerade ($p = 2k+1 \Rightarrow p^2 = 4k(k+1)+1$). Aber $p^2 = 2q^2$ ist gerade. Somit muss auch p gerade sein, $p = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Folglich gilt $4l^2 = p^2 = 2q^2$, $q^2 = 2l^2$. Analog zu vorher folgt daraus, dass q gerade ist. Also haben p und q den gemeinsamen Teiler 2. Widerspruch. Die Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ muss also falsch gewesen sein. □

3. **Vollständige Induktion**
Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, um Aussagen über alle natürlichen

Zahlen ab einer gewissen Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ zu beweisen, etwa die Richtigkeit der Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$:
$A(n): \quad 1+2+3+\ \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Der **Induktionsbeweis** erfolgt in zwei Schritten:

1. **Induktionsanfang**: Es wird gezeigt, dass die Aussage $A(n_0)$ für $n = n_0$ gilt.

2. **Induktionsschritt**: Unter der Voraussetzung, dass für ein $n \geq n_0$ die Aussage $A(n)$ gilt, wird die Aussage $A(n+1)$ gezeigt.

Also: 2a. **Induktionsvoraussetzung:** $A(n)$ gilt.
2b. **Induktionsbehauptung:** Es wird behauptet, dass $A(n+1)$ richtig ist.
2c. **Induktionsbeweis:** Aus $A(n)$ wird $A(n+1)$ hergeleitet.

Typischerweise ist $n_0 = 0, 1$ oder 2. Wenn $A(n_0)$ gemäß 1. gilt, gelten sukzessive gemäß 2. auch $A(n_0+1)$, $A(n_0+2)$ etc., d.h. alle $A(n)$ mit $n \geq n_0$. Wichtig aber: Anfang $A(n_0)$ gültig.

Beispiele:

i) $A(n): \quad 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ wahr
1. Anfang: $A(1): \quad 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ wahr
2. Schritt: Es gelte, dass $1+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ wahr ist. Wir behaupten:

$1+\ldots+n+n+1 = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich
$(1+\ldots+n)+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. $\square$

ii) $A(n): \ 1+2+\ldots+n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ falsch
Die Beh. ist falsch, der 1. Schritt (Induktionsanfang) gilt nicht $1 \neq \frac{0 \cdot 3}{2} = 0$.
Aber der 2. Schritt (Induktionsschritt) würde funktionieren:
Aus $A(n): 1+2+\ldots+n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$ folgte

$$
\begin{aligned}
(1+\ldots+n)+(n+1) &= \frac{(n-1)(n+2)}{2}+(n+1) = \frac{(n^2+n-2)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2+3n}{2} = \frac{((n+1)-1)((n+1)+2)}{2} \quad , \quad \text{also } A(n+1). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Es ist also wichtig, dass der Induktions**anfang** gilt, ggf. auch noch nicht für $n = 0, 1$ oder 2, aber erst später:

iii) $A(n)\ : 2^n > n^2$ wahr für $n \geq 5$, falsch für $n = 2, 3, 4$
1. **Induktionsanfang**: $n = 5$, $A(5): \ 2^5 = 32 > 5^2 = 25$

2. **Induktionsschritt**: Annahme: $2^n > n^2$ gelte. Behauptung $2^{n+1} > (n+1)^2$, also $2 \cdot 2^n > n^2 + 2n + 1$. Wir wissen $2^n > n^2$, also $2 \cdot 2^n > 2n^2$. Wenn $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$ wäre, folgte die Behauptung. Wir benötigen also $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ d.h. $(n-1)^2 \geq 2$. Für $n \geq 3$ gilt $n^2 - 2n - 1 \geq 0$, also $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. $\square$

Binomialkoeffizienten
Seien $n, k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\},\ 0 \leq k \leq n$. Sei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$. $\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n.$

Es ist $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Behauptung. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ für $1 \leq k \leq n.$

Beweis. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1-k)+k}{k!(n+1-k)!}\, n! = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$

$\square$

In Dreiecksform aufgeschrieben, erhält man das *Pascalsche Dreieck*. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten wieder, k verschiedene Elemente aus einer Menge von n Elementen auszuwählen. So ist etwa die Anzahl der Möglichkeiten im Lotto $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$:

Satz. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$. Dann ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen.

Beweis. Mit $A(n)$ bezeichnen wir die Aussage für $n \in \mathbb{N}$:
$\forall_{0 \leq k \leq n}\ \binom{n}{k}$ = Zahl der Auswahlmöglichkeiten von k aus n Elementen.
Wir beweisen dies durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang: $n = 1$: $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ nur jeweils eine Möglichkeit.

Induktionsschritt: $A(n)$ gelte. Wir betrachten dann eine $(n+1)-$ elementige Menge und wollen k Elemente davon auswählen. O. B. d. A. sei $1 \leq k \leq n$; die Fälle $k = 0$ und $k = n + 1$ sind trivial. Es gibt dann zwei Möglichkeiten: Eines der ausgewählten k Elemente ist das $(n+1)-$te, dann müssen nach $(k-1)$ aus den ersten n Elementen ausgewählt werden **oder** nicht.

Das ergibt insgesamt
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$
Auswahlmöglichkeiten. Für alle k durchgeführt, ergibt das $A(n+1)$.

$\square$

Binomischer Satz
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt die Binomische Formel

$$A(n): (a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Beweis der Aussage $A(n)$ durch vollständige Induktion:

1. **Induktionsanfang:** $A(1)$ gilt, da $(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1$.
2. **Induktionsschritt:** Es gelte $A(n)$. Wir beweisen $A(n+1)$:
   $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \, (a+b)$ Induktionsvoraussetzung anwenden
   $= \left(\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \right) (a+b)$
   $= \left(\binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \ldots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a b^n \right)$
   $+ \left(\binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \right)$

Vorfaktoren beider Terme $a^n b$ addieren sich zu $\binom{n}{1} + \binom{n}{0} = n + 1 = \binom{n+1}{1}$.

Vorfaktoren der Terme $a^{(n+1)-i} b^i$ addieren sich zu $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$, also

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$
$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i \quad , \quad \text{also } A(n+1). \qquad \square$$

Es folgt also z. B.
$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$, $0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}$.
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a b^3 + b^4$, mit $\binom{4}{2} = 6$.

Komplexe Zahlen
Nicht alle quadratischen Gleichungen haben reelle Lösungen; so besitzt etwa $x^2 + 1 = 0$, $x^2 = -1$ keine reelle Lösung $x \in \mathbb{R}$, da stets $x^2 \geq 0$ ist.
Man führt die **imaginäre Einheit** $i := \sqrt{-1}$ als nicht-reelle "Zahl" ein, um "**komplexe**" Lösungen beliebiger quadratischer (und anderer algebraischer) Gleichungen zu bekommen. Paare reeller Zahlen $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ kombiniert mit i, $a + ib$ bezeichnet man als **komplexe Zahlen**

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Auf $\mathbb{C}$ führt man eine **Addition** und eine **Multiplikation** ein (indem man formal komponentenweise addiert und mit Kommutativ - und Distributivgesetz - axiomatisch vorausgesetzt - arbeitet): für $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ setze

$$(a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2) := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$(a_1 + i\,b_1) \cdot (a_2 + i\,b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2).$$

Dabei benutzt man formal $i^2 = -1$. Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat dann auch für $p^2 < 4q$ zwei Lösungen, nämlich

$$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \;=\; -\frac{p}{2} \;\pm\; i\,\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \;\in\; \mathbb{C}.$$

Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt a der **Realteil** und b der **Imaginärteil** von z, $a = Re\, z$, $b = Im\, z$, $z = Re\, z + i\; Im\, z$. Die Zahl $\overline{z} := a - ib$ heißt die zu z **konjugiert komplexe** Zahl und $|z| : \sqrt{a^2 + b^2}$ der **Betrag** von z . Es ist $z\,\overline{z} = |z|^2$. Man kann $\mathbb{C}$ als Vektoren in der *Gaußschen Zahlebene* veranschaulichen, durch Identifikation von $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^2$, vgl. Fig. 5. Dann entspricht die Addition komplexer Zahlen die Vektoraddition im Parallelogramm.

Man kann in $\mathbb{C}$ auch Quotienten $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i\, b_1}{a_2 + i\, b_2}$ bilden, wenn der Nenner $a_2 + i\, b_2$ nicht 0 ist, d.h. wenn $a_2 \neq 0$ **oder** $b_2 \neq 0$ ist:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + i\, b_1)(a_2 - i\, b_2)}{(a_2 + i\, b_2)(a_2 - i\, b_2)} = \frac{(a_1\, a_2 + b_1\, b_2) + i(b_1\, a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Es gilt übrigens $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\; |z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \;=\; \frac{|z_1|}{|z_2|}$ für $z_2 \neq 0$.

Beispiele:

$$(1)(2 + \sqrt{3}\, i)(3 - \sqrt{2}\, i) \qquad = (6 - \sqrt{6}\, i^2) + i(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

$$= (6 + \sqrt{6}) \;+\; (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})\, i$$

$$(2)\sqrt{3 + \sqrt{7}\, i}\sqrt{3 - \sqrt{7}\, i} \qquad = \sqrt{(3 + \sqrt{7}\, i)(3 - \sqrt{7}\, i)} = \sqrt{9 + 7} = 4$$

$$(3)\tfrac{3a + 4b\, i}{4a - 3b\, i} + \tfrac{4a - 3b\, i}{4a + 3b\, i} \qquad = \tfrac{(3a + 4b\, i)(4a + 3b\, i) + (4a - 3b\, i)(4a - 3b\, i)}{(4a - 3b\, i)(4a + 3b\, i)}$$

$$= \tfrac{1}{16a^2 + 9b^2}\,([(12a^2 - 12b^2) + i(16ab + 9ab)] + [(16a^2 - 9b^2) - i(12ab + 12ab)])$$

$$= \tfrac{1}{16a^2 + 9b^2}\;((28a^2 - 21b^2) + iab) = \tfrac{7(4a^2 - 3b^2) + iab}{16a^2 + 9b^2}$$

$$(4)(5 - i)(6 - i) + \left(\tfrac{5 - i}{6 - i}\right) \qquad = (29 - 11i) + \tfrac{(5 - i)(6 + i)}{(6 - i)(6 + i)}$$

$$= 29 - 11i \;+\; \tfrac{31 - i}{37} = 29\tfrac{31}{37} - 11\tfrac{1}{37}\, i$$

Ableitungsregeln

Sei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \;\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, d.h. eine eindeutige Abbildungsvorschrift f , so dass für alle $x_0 \in I$ der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

Die genaue Definition von Grenzwerten erfolgt in der Vorlesung: Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$ als Grenzwert der Steigungen von Sekanten durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$, vgl. Figur 6.

Potenzfunktionen $f(x) = x^\alpha; \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \; f'(x) = \quad \alpha x^{\alpha-1}$; $x \in \mathbb{R}$ ($x > 0$ wenn $\alpha \notin \mathbb{R}$).

Rechenregeln: Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, gelten die Formeln

$$\begin{aligned}
(\alpha\, f + \beta\, g)'(x) &= \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x) \quad \textit{Summenregel} \\
(f g)'\,(x) &= f'(x)\, g(x) + \; f(x)\; g'\,(x) \quad \textit{Produktregel} \\
\left(\tfrac{f}{g}\right)'(x) &= \tfrac{f'(x)g(x) - g'(x)\, f(x)}{g(x)^2} \quad \textit{Quotientenregel} \quad (g(x) \neq 0)
\end{aligned}$$

Beh. $\sin'(x) = \cos\,(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\tan'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2}$

Beweisidee: Der Differenzenquotient für $\sin(x)$ in x_0 ist für $h \in \mathbb{R}$ $(x = x_0 + h)$

$$\frac{\sin(x_0 + h) \; - \; \sin(x_0)}{h} = \frac{2\sin(\frac{h}{2})\; \cos(x_0 + \frac{h}{2})}{h} = \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \; \frac{\sin(h/2)}{h/2}.$$

Dabei wurde benutzt, dass gilt

$$\sin\left(x_0 + \frac{h}{2} \pm \frac{h}{2}\right) = \sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\; \cos\frac{h}{2} \;\pm\; \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right).$$

Wir behaupten, dass $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ist (Winkel x im Bogenmaß).

Es ist $\quad \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, also

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Nähert sich x der Null an, so nähert sich $\cos x$ der 1 an. Für $x = \frac{h}{2}$ und $h \to 0$ folgt $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} = \cos\,(x_0)$, $\quad$ denn $\quad \lim\limits_{h \to 0} \cos(x_0 + \frac{h}{2}) = \cos(x_0)$.

Beweis für $\cos' = -\sin$ ähnlich. Quotientenregel: Für $\cos(x) \neq 0$ gilt

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'\;(x) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

Exponentialfunktion

Für Zinseszins - Betrachtungen ist von Bedeutung, dass der Grenzwert $e := \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

existiert (Beweis in der Vorlesung), $e \simeq 2.71828$.

Man hat für festes $h \in \mathbb{R}$, wenn man $m = nh$ setzt

$$e^h = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nh} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{h}{m}\right)^m .$$

Somit gilt für den Differenzenquotienten

$$D := \frac{e^h - e^0}{h} = \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{m\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{h}{m}\right)^m - 1}{h}$$

nach dem Binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} D &= \lim_{m\to\infty} \left[\left(1 + m\tfrac{h}{m} + \tfrac{m(m-1)}{2} \left(\tfrac{h}{m}\right)^2 + \right) - 1\right] /h \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(1 + \tfrac{m-1}{2m}\, h + \tbinom{m}{3} /m^3\, h^2 + \ldots\right) \end{aligned}$$

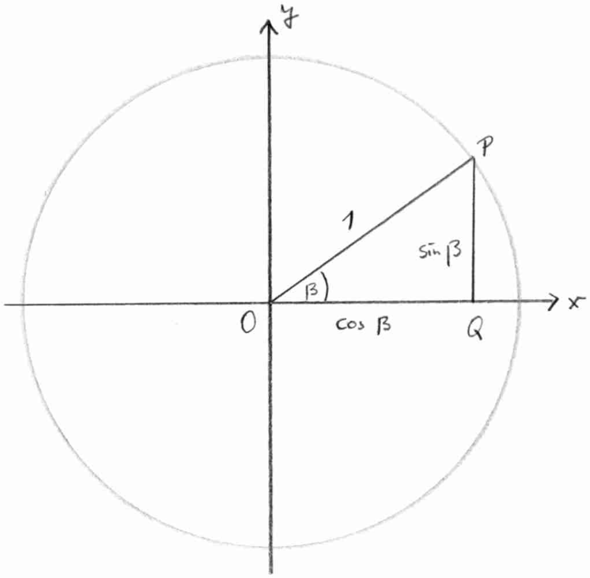
Für $h \to 0$ muss man zeigen, dass man beide Grenzwerte vertauschen kann, um zu folgern

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = 1 \text{ , woraus mit } e^{x+h} = e^x \cdot e^h$$

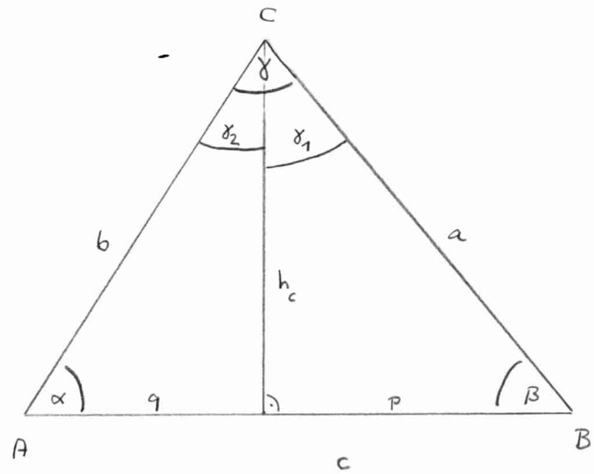
$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = e^x$$

folgt. Die Bedeutung der **Eulerschen Zahl** e resultiert aus dieser Formel $f' = f$, wenn $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ ist.

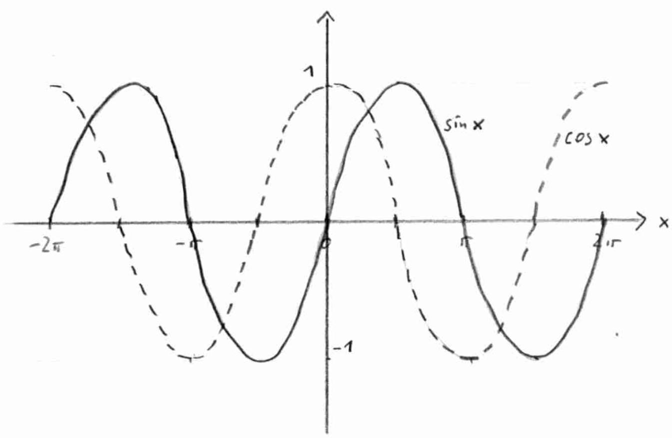
Folgerung. Für $a > 0$ gilt $(a^x)' = a^x\, ln\, a$.
Denn: $(a^x)' = \left[(e^{lna})^x\right]' = \left(e^{x\, ln\, a}\right)' = (ln\, a)\ e^{x\, lna} = (ln\, a)\, a^x$, mit der Kettenregel



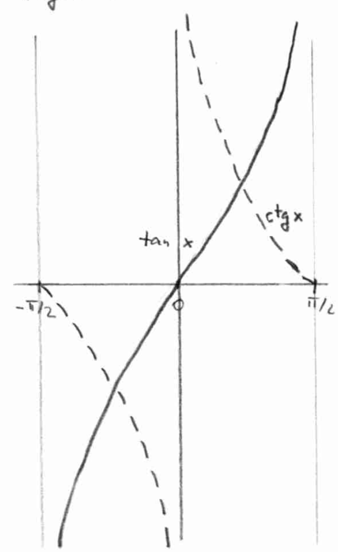
Figur 1



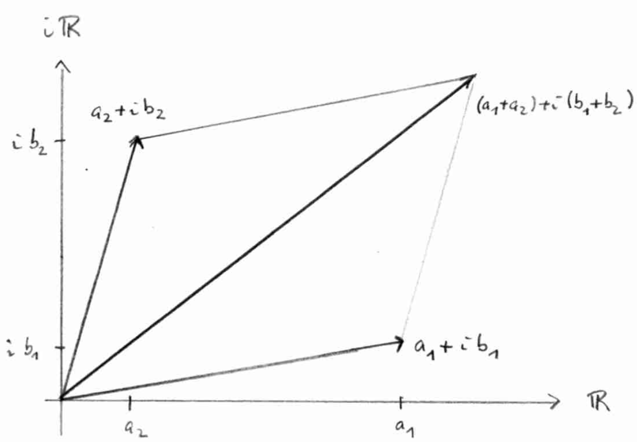
Figur 2



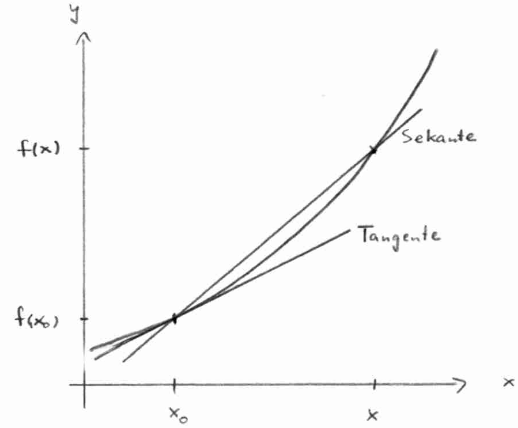
Figur 3



Figur 4



Figur 5



Figur 6