Testklausur, 19.01.2009

A. (a) Geben Sie die Definition und Charakterisierung des Limes Inferior einer Folge an.

(b) Wie lautet die Definition der Surjektivität von Funktionen?

(c) Formulieren Sie das Cauchy-Kriterium für Folgen.

B. (1.) Ist $\binom{9}{2}$ gleich (a) 36 , (b) 45, (c) 28?

(2.) Wogegen konvergiert $(1+\frac{2}{n})^n$ für $n \to \infty$? (a) e , (b) e^2 , (c) $\sqrt{e}$.

(3.) Ist die induktiv durch $x_1 := 2$, $x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (a) monoton wachsend, (b) monoton fallend, (c) alternierend?

C. (1.) Man bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (wenn er existiert), wenn

$$x_n := \frac{(1+\frac{1}{n})^n \cdot n^3 + (n+1)^2 \cdot n}{(2n+1)^3.}$$

(2.) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten x und y (in $\mathbb{K}$). Zeige: Die Folge $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und zwar gegen $x - y$.

(3.) Man beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ gilt:

$$n^2 + 2 \leq 2^n.$$