Prof. Dr. H. König WS 2008/09

Klausur zu "Analysis I"
14.02.2009, 9-12 Uhr

Geben Sie bitte jede der Aufgaben unter C und D auf **separaten** Blättern ab, **sortiert** in der Reihenfolge der Aufgabenstellung und jeweils versehen mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**. Für B können Sie **ein** Blatt verwenden, die richtige Antwort zu den Multiple-Choice-Aufgaben A kreuzen Sie bitte direkt auf diesem Blatt an. Die beiden Aufgaben unter $\mathbf{D_W}$ sollen von **1-Fach BA-** und Diplomstudierenden, die beiden Aufgaben unter $\mathbf{D_L}$ von **2-Fach BA-** und Lehramtstudierenden (POL I) bearbeitet werden.

A. 1. Ist $\binom{10}{3}$ gleich a) 120, b) 360, c) 60 ? (1/2 P.)

2. Sei $M = \{-1\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\frac{1}{2n^2} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Ist der Limes Inferior von M gleich

a) -1 , $b)$ $-\frac{1}{2}$, $c)$ 0 ? (1/2 P.)

3. Konvergiert die induktiv durch $x_1 := \frac{5}{2},\ x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{5}{2x_n}$ definierte Folge gegen a) $\sqrt{2}$, $b)\sqrt{5}$, $c)\sqrt{\frac{5}{2}}$? (1/2 P.)

4. Sei $0 < q < 1$. Ist die Summe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ gleich

a) $\frac{1}{1-q}$, b) $\frac{q}{1-q}$, c) $\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$? (1/2 P.)

B. 1. Sei $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Geben Sie die Definition **und** die Charakterisierung des Supremums von M (mit Quantoren) an. (1 P.)

2. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Geben Sie die $\epsilon - \delta -$ Charakterisierung der Stetigkeit von f auf $[0,1]$ in Quantorenschreibweise an. (1 P.)

3. Formulieren Sie das Cauchy-Kriterium für Reihen als Quantorenaussage. (1 P.)

4. Wie lautet die präzise Formulierung des Quotientenkriteriums für die Reihenkonvergenz? (1 P.)

5. Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß mit der Definition der darin vorkommenden Begriffe. (1 P.)

C. 1. Bestimme den Wert der Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Untersuche ferner die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz (unter Benutzung und Angabe geeigneter Konvergenzkriterien für Reihen):

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{2^n} \quad , \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\ ln\,(n+1)^3} \; .$$

(4 P.)

2. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$x_n := \frac{(n+2)^3\,(n^2-\frac{1}{n})^2\,(1+\frac{1}{n})^n}{(n\sqrt[n]{n}-1)^7}\,.$$

Untersuche mittels der Rechenregeln für konvergente Folgen, ob $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert und - wenn ja - bestimme diesen Grenzwert. (4 P.)

3. Zeigen Sie **direkt** über die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ nicht gleichmäßig stetig ist. (4 P.)

4. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\sin(3x) + \sin(x) = 0\ ,\ x \in [0,\pi]$$

im Intervall $[0,\pi]$ (mit Begründung!). Tip: Leiten Sie zunächst ein Formel des Typs

$$\sin(3x) = a\sin(x) - b\ \sin^3(x)\ ;\ a,b \in \mathbb{R}$$

her. (4 P.)

5. Bestimmen Sie die Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x^2-2x-3| > \frac{9}{4} \right\}$$

als Vereinigung von Intervallen, mit Begründung der Rechenschritte. (4 P.)

D$_W$ Für **1-Fach BA**-Studierende und **Diplom**studierende:

6. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ eine gegen ∞ divergente Folge, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.
Sei $y_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeige: Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert ebenfalls gegen ∞ , $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. (Dies gilt auch für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N$, aber der Beweis für $x_n \geq 0$ ist etwas einfacher.) (4 P.)

7. Bestimmen Sie **alle** komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 = 1$ und geben Sie diese in Radikalschreibweise (d.h. als Wurzelausdrücke) an. (4 P.)

D$_L$ Für **2-Fach BA**-Studierende und **Lehramt**studierende (nach POL I):

6. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Beweisen Sie durch Rückgriff auf die Konvergenzdefinition, dass die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und zwar gegen $x \cdot y$. (4 P.)

7. Für welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ ergibt sich aus dem Wurzelkriterium die Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n}$? Was läßt sich über die Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe für $z = 1$ und $z = -1$ aussagen? (4 P.)

Maximale Punktzahl: 35. Viel Erfolg!