

Blatt 9

Aufgabe 33

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Benutze das Cauchy-Produkt von Reihen, um das Quadrat $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2$ als Reihe zu schreiben. Bestimme den Wert der entstehenden Reihe. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die so entstandene Reihe?

Aufgabe 34

Sei $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$. Zeige, dass die Doppelreihe

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(m^2 + n^2)^s}$$

absolut konvergent ist. Was passiert für $s = 1$?

Aufgabe 35

Bestimme die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{2}{|x|}} - 1 - \frac{2}{|x|} \right)$ (L)

Aufgabe 36

Sei $a \in \mathbb{C}$ fest gegeben. Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung

$$\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = 1$$

erfüllen. Welche geometrische Figur in der komplexen Zahlenebene stellt die Lösungsmenge dar?