Prof. Dr. H. König **Übungen zu "Analysis I"** WS 2008/09

Blatt 8

Aufgabe 29
Sei $x_1 := 1$ und $x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ die gegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zeige mittels der Definition der Cauchyfolge, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist.
Tip: Übungsaufgabe 22 und geometrische Reihe.

Aufgabe 30

(a) Man entscheide (mit Beweis), welche der folgenden Reihen konvergent bzw. divergent sind:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \quad , \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \quad , \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \quad , \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \quad .$$

(b) Für welche $z \in \mathbb{K}$ konvergiert

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(z + \frac{1}{n}\right)^n \quad ?$$

(L)

Aufgabe 31

(a) Zeige, dass die folgende Reihe konvergiert und berechne ihren Wert:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+4)} \quad .$$

(b) Man entscheide die Konvergenz bzw. die Divergenz folgender Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(log_2 n)^2} \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(log_2 n)} \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(log_2 n)} \quad .$$

(L)

Aufgabe 32
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ monoton fallend und $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergiere.
Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} (n\, x_n) = 0$. Zeige ferner durch ein Beispiel, dass dies i.a. falsch ist, wenn die Folge nicht monoton fallend ist.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 14.1.2009, 8:00 Uhr im Schrein.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr 2009!