Übungen zu "Analysis I"
Blatt 7

Aufgabe 25. Berechne den unendlichen Kettenbruch

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

Dazu definiere die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv durch

$$x_1 := 1,\ x_{n+1} := 1+\frac{1}{x_n}\ ,\ n\in\mathbb{N}\ .$$

Zeige dann: $x_n \geq 1,\ x_{n+1}x_n \geq 2$ und

$$|x_{n+2}-x_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |x_2-x_1|\ ,\ n\in\mathbb{N}_0\ .$$

Folgere daraus, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 26. Sei $c>0$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv definiert durch

$$x_1 := \sqrt{c}\ ,\ x_{n+1} := \sqrt{c+x_n}\ ,\ n\in\mathbb{N}\ .$$

Zeige:

i) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.
ii) $x_n \leq 1+\sqrt{c}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.
iii) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 27. i) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

gilt. Finde ein Beispiel dafür, dass im allgemeinen nicht das Gleichheitszeichen in der Ungleichung gilt.

ii) Sei $z_n := \sqrt{n} - [\sqrt{n}\,]\ ,\ n\in\mathbb{N}$. Berechne

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} z_n \quad \text{und} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} z_n\ .$$ (L)

Aufgabe 28. Bestimme die Mengen

a) $M_1 := \{x\in\mathbb{R} \mid\ |x^2+2x-3| > 2\}$.
b) $M_2 := \{x\in\mathbb{R} \mid\ x^3-2x^2-3x\ >\ -4\}$. (L)

Abgabe der schriftlichen Übungen bis Mittwoch, 17.12.2008, 8:00 im Schrein