Prof. Dr. H. König **Übungen zu "Analysis I"** WS 2008/09

Blatt 6

Aufgabe 21
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit $x_n \to x,\ y_n \to y\ ;\ \ x, y \in \mathbb{K}$. Zeige:

a) $x_n\, y_n \to x\, y$

b) Ist $y \neq 0$, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $y_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und $x_n/y_n \to x/y$. (L)

Aufgabe 22
Sei $x_1 := 1$ und $x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ induktiv definiert. Zeige:

a) Für alle $n \geq 2$ ist $x_n > \sqrt{2}$ und es gilt

$$(x_{n+1} - \sqrt{2}) \ \leq\ \frac{1}{2}\,(x_n - \sqrt{2})^2.$$

b) Beweise mittels der Definition der Folgenkonvergenz, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$ ist.
Tip: Bringe $x_{n+1} - \sqrt{2}$ auf Hauptnennerform.

Aufgabe 23

i) Seien $x_n = \frac{n^2 + \sqrt[n]{n} + 1}{3n^2 + 1 + \frac{1}{n}}$, $y_n = \frac{(3+n^2)^3(1+4n)^2}{(1+\sqrt{2}\,n)^8}$.
Bestimme die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (falls sie existieren).

ii) Seien $a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_k \in \mathbb{K}$ mit $a_k \neq 0 \neq b_k$ gegeben. Sei
$z_n = \frac{a_0 + \ldots + a_k\, n^k}{b_0 + \ldots + b_k\, n^k}$.
Zeige: Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und zwar gegen $\frac{a_k}{b_k}$. (L)

iii) Sei $u_n = \sqrt{4^n + 2^n} - \sqrt{4^n}$. Bestimme den Grenzwert der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls er existiert.

Aufgabe 24
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{K}$ gegen $x \in \mathbb{K}$ konvergente Folge, $x_n \to x$.
Zeige: Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *arithmetischen Mittel*

$$y_n \ :=\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

konvergiert ebenfalls, und zwar auch gegen x .

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 10.12.2008, 8:00 Uhr im Schrein.