Prof. Dr. H. König **Übungen zu "Analysis I"** WS 2008/09

**Blatt 5**

**Aufgabe 17**
Seien $A := \{(-1)^m - \frac{1}{3n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ und $B := \{\frac{n^2}{3^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ gegeben.
Bestimme $\inf A$, $\sup A$ und $\inf B$, $\sup B$ (mit Beweisen). Zeige für Mengen $C, D \subseteq \mathbb{R}$, dass $\inf(C \cup D) = \min(\inf(C), \inf(D))$ gilt. Was ergibt sich für $\inf(A \cup B)$ ?

**Aufgabe 18**
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine streng monoton wachsende Abbildung, d. h. für alle $x, y \in [a, b]$ gelte

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Zeige: $f$ besitzt einen Fixpunkt, d. h. es gibt $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$ .
Tip:
Untersuche $c = \inf\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq x\}$ oder $d = \sup\{x \in [a, b] \mid f(x) \geq x\}$.

**Aufgabe 19**

(a) Bestimme komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ , die das Gleichungssystem

$$(2 + i)\,z - (-3 + i)\,w = 4 - 3i$$

$$(1 - 4i)\,z + (2 - 3i)\,w = 2 - 14i$$

lösen.

(b) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $y \neq 0$. Zeige: $z + |z| \neq 0$ und $v := \sqrt{|z|}\,\frac{z+|z|}{|z+|z||}$ löst die Gleichung $v^2 = z$ (Existenz von Wurzeln in $\mathbb{C}$). (L)

**Aufgabe 20**

(i) Seien $U_i \subseteq \mathbb{K}$ , $i \in I$ offene Mengen. Zeige: $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen. Ferner: Wenn $I$ endlich ist, ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ offen.

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ . Zeige: $[a, b]$ ist (als Menge) abgeschlossen.

(iii) Beweise: Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine höchstens abzählbare Vereinigung offener $\varepsilon$- Umgebungen. (L)

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 3.12.2008, 8:00 Uhr im Schrein.