Prof. Dr. H. König **Übungen zu "Analysis I"** WS 2008/09

Blatt 4

Aufgabe 13
Man bestimme diejenigen natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, für die die Ungleichung

$$n! \;\leq\; (n/2)^n$$

gilt. Beweise diese Ungleichung mittels vollständiger Induktion.
Tip: Anwendung der Bernoulli-Ungleichung auf $(1 + {}^1/_n)^n$.

Aufgabe 14
Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $c \in \mathbb{R}$ mit $c \leq M$. Zeige:

$$c = \inf M \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon>0} \;\; \exists_{x \in M} \quad c \leq x < c + \varepsilon.$$

Aufgabe 15
Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkte nicht-leere Teilmengen von M. Zeige:

i) $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

ii) Gilt auch $\sup(A \cdot B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$? (L)

iii Bestimme die Mengen $A + B$ und $A \cdot B$ für $A = [-3, 2)$ und $B = (-2, 1]$ sowie das Supremum und das Infimum von $A + B$ und $A \cdot B$. Wann sind diese auch ein Maximum und ein Minimum?

Aufgabe 16
Sei K ein geordneter Körper. Seien $x, y, \varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$. Zeige:

(1) $xy > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ((x > 0 \wedge y > 0) \;\vee\; (x < 0 \wedge y < 0))$

(2) $2\,|xy| \;\leq\; \varepsilon^2 x^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\, y^2.$ (L)

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 26.11.2008, 8:00 Uhr im Schrein.