Prof. Dr. H. König **Übungen zu "Analysis I"** WS 2008/09

Blatt 3

Aufgabe 9
Man zeige durch vollständige Induktion:

a) $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $\forall_{n\in\mathbb{N},\, n\geq 4} \quad n^3 < 3^n$

Aufgabe 10
Sei $(K,+,\cdot,<)$ ein geordneter Körper und seien $x,y,a \in K$ sowie $\varepsilon > 0$. Mittels der Axiome beweise man die folgenden Implikationen

i) $x < y \quad \Rightarrow \quad x < (x+y)/2 < y$

ii) $|x-a| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon$

iii) $x \cdot y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x=0) \vee (y=0)$ (L)

Aufgabe 11
Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Seien $A, B \in \mathcal{P}(Y)$.
Beweise, dass gilt:

$$f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)\ ,\ f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X).$$

Aufgabe 12
Sei P die Menge der Primzahlen. Man schreibe die Aussagen (a) und (b) als deutschen Satz und formuliere die Aussagen (c) und (d) mit Hilfe von Quantoren als Formelaussage

(a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \exists_{p\in\mathrm{P}} \quad n < p < 2n$ (L)

(b) $\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad ((n \geq 4 \quad \wedge \quad 2|n) \quad \Rightarrow \quad \exists\, p,q \in \mathrm{P} \quad n = p+q)$

(c) Jede Primzahl, die bei Division durch 4 den Rest 1 liefert, kann als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden. (L)

(d) Es gibt eine Quadratzahl, die als Summe von zwei Quadratzahlen geschrieben werden kann.

Dabei ist eine "Quadratzahl" das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 19.11.2008, 8:00 Uhr im Schrein.