Prof. Dr. H. König **Übungen zu "Analysis I"** WS 2008/09

Blatt 11

Aufgabe 41
Sei $f\,:\,(0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto\ 1/\sqrt[3]{x}$. Zeige direkt mittels der Definition, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Warum ist f stetig?

Aufgabe 42
Sei $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ stetig. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x)$ existiert.

(2) f ist gleichmäßig stetig auf $(0,1)$.

Aufgabe 43
Definiere die *hyperbolischen Funktionen* $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \cosh(x) := \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})\,,\ g(x) := \sinh(x) := \frac{1}{2}\,(e^x - e^{-x}).$$

Zeige:

(a) $f \geq 1$, $f\,|_{\mathbb{R}_+}$, $f\,|_{\mathbb{R}_-}$ und g sind streng monoton.

(b) Bestimme die Umkehrfunktionen $(f\,|_{\mathbb{R}_+})^{-1}$, $(f\,|_{\mathbb{R}_-})^{-1}$ und g^{-1} explizit, unter genauer Angabe ihrer Definitionsbereiche.

Aufgabe 44
Sei $b > 1$, $a > 0$. Zeige

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^a}{b^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log_b x}{x^a} = 0$.

(2) Für alle $x, y > 0$ gilt: $\frac{1}{2}\,(\log_b x + \log_b y) \leq \log_b\,(\frac{1}{2}(x+y))$. (L)

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 4.2.2009, 8:00 Uhr im Schrein.