Prof. Dr. H. König **Übungen zu "Analysis I"** WS 2008/09

Blatt 10

Aufgabe 37

(i) Sei $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f : I \to I$ stetig.
Zeige: f besitzt einen Fixpunkt, d.h. $\exists\, x \in I \quad f(x) = x$.

(ii) Sei $I = [1, 2]$ und $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Zeige: $f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig mit Bild $(f) \subseteq I$. Welches ist der Fixpunkt von f in I ?

(iii) Zeige: Aussage (i) ist für offene Intervalle im allgemeinen falsch. (L)

(iv) Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig mit $f(0) = f(1)$.
Zeige: Es gibt $t \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(t) = f(t + \frac{1}{2})$. (L)

Aufgabe 38

Sei $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) / x^2 & x \neq 0 \\ 1/2 & x = 0. \end{cases}$$

Zeige unmittelbar mittels der Definition der Stetigkeit, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist.

Aufgabe 39

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \begin{cases} Re\,(z) / \sqrt{|z|} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f auf ganz $\mathbb{C}$ stetig ist.

Aufgabe 40

Sei $d \in \mathbb{N}$ ungerade und seien $a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ mit $a_d \neq 0$.
Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das durch

$$p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k\, x^k$$

definierte Polynom. Zeige: P besitzt mindestens eine reelle Nullstelle, d.h. es gibt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) = 0$.

Abgabe der Übungen bis Mittwoch, 28.1.2009, 8:00 Uhr im Schrein.