Übungen zu Analysis II

Lösung zu Blatt 13, Aufgabe 4

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $f(x,y,z) := z^3 + z + xy - 1$.

a) **Beh.:** Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert genau ein $z \in \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = 0$.

Bew.: Definiere die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; z \mapsto z^3 + z$. Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Setze $a := 1 - xy$. Es ist also zu zeigen, daß genau ein $z \in \mathbb{R}$ existiert mit $F(z) = a$, es genügt also einzusehen, daß F eine bijektive Funktion ist. F ist offenkundig differenzierbar, und für $z \in \mathbb{R}$ gilt: $F'(z) = 3z^2 + 1 > 0$. Also ist F streng monoton wachsend und somit injektiv. Da F ein Polynom vom Grad drei ist, gilt ferner $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = \infty$ und $\lim\limits_{z\to-\infty} F(z) = -\infty$. Da außerdem $F(\mathbb{R})$ zusammenhängend ist, muß bereits $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ gelten. F ist auch surjektiv und damit bijektiv. Die Behauptung ist gezeigt.

b) **Vor.:** Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $g(x,y) := z$ die nach Aufgabenteil eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $f(x,y,g(x,y)) = 0$.

Beh.: g ist differenzierbar, und es gilt $g'(1,1) = -(1,1)$.

Bew.: Sei $a \in \mathbb{R}^2$. Setze $b := g(a)$. Dann gilt $f(a,b) = 0$. Nun ist $\frac{\partial f}{\partial z}(a,b) = 3b^2 + 1 \neq 0$. Der Satz über implizite Funktionen liefert also die Existenz von Umgebungen U von a in $\mathbb{R}^2$ sowie V von b in $\mathbb{R}$ und einer differenzierbaren Funktion $h\colon U \to V$, so daß $f(x,y,h(x,y)) = 0$ für alle $(x,y) \in U$. Es gilt aber auch $f(x,y,g(x,y)) = 0$. Da nun aber nach Aufgabenteil a) für gegebenes $(x,y) \in U$ nur eine einzige Lösung z der Gleichung $f(x,y,z) = 0$ existiert, muß gelten: $h = g|_U$. Da h in a diffenzierbar ist und U eine Umgebung von a ist, folgt, daß auch g in a differenzierbar ist und $g'(a) = h'(a)$ gilt.
Da $a \in \mathbb{R}^2$ beliebig gewählt war, ist g also differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$. Nach dem Satz über das Differenzieren impliziter Funktionen gilt:

$$g'(x,y) = -\Big(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\Big)^{-1}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y))\Big) = -\frac{(y,x)}{g(x,y)^2+1}.$$

Da $f(1,1,0) = 0$, gilt nach Aufgabenteil a) $g(1,1) = 0$. Einsetzen liefert also: $g'(1,1) = -(1,1)$.

c) **Beh.:** g besitzt keine lokalen Extrema.

Bew.: Angenommen $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ist ein lokales Extremum von g. Dann gilt also $g'(a) = 0$. Nach $(*)$ folgt: $\frac{1}{g(a)^2+1}(a_2, a_1) = -g'(a) = 0$. Also muß schon $a = 0$ gelten.
Die Behauptung folgt also, wenn zeigen, daß es in jeder Umgebung U von 0 Punkte $x, y \in U$ so gibt, daß $g(x) < g(0)$ und $g(y) > g(0)$.
Es ist $F(g(0)) = 1$ mit der in Aufgabenteil a) definierten Funktion $F(z) := z^3 + z$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Setze $x := \frac{1}{2}(\varepsilon, \varepsilon)$ und $y := \frac{1}{2}(\varepsilon, -\varepsilon)$. Dann gilt $x, y \in B_\varepsilon(0)$. Da $F(g(x)) = 1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 < 1 = F(g(0))$ und $F(g(y)) = 1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 > 1 = F(g(0))$. Da F streng monoton wachsend ist, folgt daraus $g(x) < g(0)$ und $g(y) > g(0)$.