Übungen zu Analysis II

Blatt 14

1. Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ f(x,y,z) := (x^4+y^4+z^4-1, x^2+y^2-z^2)$.

   Sei $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x_0,y_0,z_0) = 0$. Zeigen Sie, daß dann mindestens eine der folgenden Aussagen wahr ist:

   (a) Es existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von x_0 und eine Funktion $g \in C^1(U,\mathbb{R}^2)$ mit $g(x_0) = (y_0,z_0)$ und $f(x,g(x)) = 0$ für alle $x \in U$.

   (b) Es exsitiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von y_0 und eine Funktion $h = (h_1,h_2) \in C^1(V,\mathbb{R}^2)$ mit $h(y_0) = (x_0,z_0)$ und $f(h_1(y),y,h_2(y)) = 0$ für alle $y \in U$.

   Berechnen Sie ferner $g'(x_0)$ und $h'(y_0)$ für den Fall $(x_0,y_0,z_0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}, \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2})$.

2. Seien $n,m \geq 1$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, und seien $f\colon U \times V \to \mathbb{R}$, $g\colon U \times V \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbare Funktionen. Sei ferner $(a,b) \in S := \{(x,y) \in U \times V\colon g(x,y) = 0\}$, und es gelte:

$$(*) \quad g'_y(a,b) \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m) \quad \text{ist regulär.}$$

   (a) Zeigen Sie, daß es Umgebungen W_1 von a in $\mathbb{R}^n$ und W_2 von b in $\mathbb{R}^m$, sowie eine Abbildung $h\colon W_1 \to W_2$ gibt, so daß folgende Aussagen gelten:

      (i) $h(a) = b$ und $g(x,h(x)) = 0$ für alle $x \in W_1$.

      (ii) $S \cap (W_1 \times W_2) = \{(x,h(x))\colon x \in W_1\}$.

   (b) Sei $e_1,\dots,e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Für $1 \leq j \leq m$ sei $v_j := \nabla g_j(a,b) \in \mathbb{R}^{n+m}$ und für $1 \leq k \leq n$ sei $w_k := (e_k, \partial_k h_1(a),\dots,\partial_k h_m(a)) \in \mathbb{R}^{n+m}$. definiert. Zeigen Sie, daß für alle $1 \leq j \leq m$ und $1 \leq k \leq n$ gilt: $\langle v_j, w_k\rangle = 0$ und zeigen Sie weiter, daß $v_1,\dots,v_m,w_1,\dots,w_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^{n+m}$ ist.

   (c) Sei ferner vorausgesetzt, daß (a,b) ein lokales Extremum der Funktion $f|_S$ ist. Zeigen Sie, daß dann $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{R}$ existieren, so daß gilt:

$$\nabla f(a,b) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(a,b) = 0.$$

   (d) Zeigen Sie letztlich, daß (c) auch dann gilt, wenn man die obige Voraussetzung $(*)$ ersetzt durch

$$(**) \quad \operatorname{rang}(J_g(a,b)) = m.$$

3. Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ f(x,y,z) := x^2+y+z$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ g(x,y,z) := (x^2+y^2-1, z)$. Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2c die lokalen Extrema von $f|_S$, wobei $S := \{w \in \mathbb{R}^3\colon g(w) = 0\}$.

Abgabe der Lösungen: Fr, 14.7.2006, 10.00 im Schrein