Übungen zu Analysis II

Blatt 13

1. Sei E ein normierter Vektorraum, sei $U \subset E$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, welche im Punkt $x_0 \in U$ differenzierbar sei. Zeigen Sie:

   Besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

   Hinweis: Zeigen Sie, daß für $\xi \in E$ gilt: $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0) = 0$.

Definition. Eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **indefinit**, wenn $x, y \in \mathbb{R}^n$ existieren, mit $x \cdot A \cdot {}^t x > 0$ und $y \cdot A \cdot {}^t y < 0$.

2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Ferner sei $x_0 \in U$ mit $f'(x_0) = 0$. Zeigen Sie:

   (a) Ist $H_f(x_0)$ positiv (bzw. negativ)-definit, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum (bzw. Maximum).

   (b) Ist $H_f(x_0)$ indefinit, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum.

   Hinweis: Benutzen Sie die Taylor-Approximation.

3. (a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$.

      (i) Bestimmen Sie alle Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $f'(x_0) = 0$.

      (ii) Zeigen Sie, daß f genau ein lokales Minimum und ein lokales Maximum besitzt.

   (b) Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto (y - \frac{x}{2}^2)(y - x^2)$. Zeigen Sie:

      (i) Für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^2$ hat die Funktion $\varphi_e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \mapsto g(te)$, in 0 ein lokales Minimum.

      (ii) g hat in $(0, 0)$ kein lokales Minimum. Wo ist $g > 0$, wo $g < 0$?

4. Betrachte die Gleichung

$$z^3 + z + xy = 1, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Zeigen Sie, daß diese für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = g(x, y)$ besitzt.

   (b) Beweisen Sie, daß $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie $g'(1, 1)$.

   (c) Besitzt g lokale Extrema?

Abgabe der Lösungen: Fr, 7.7.2006, 10.00 im Schrein